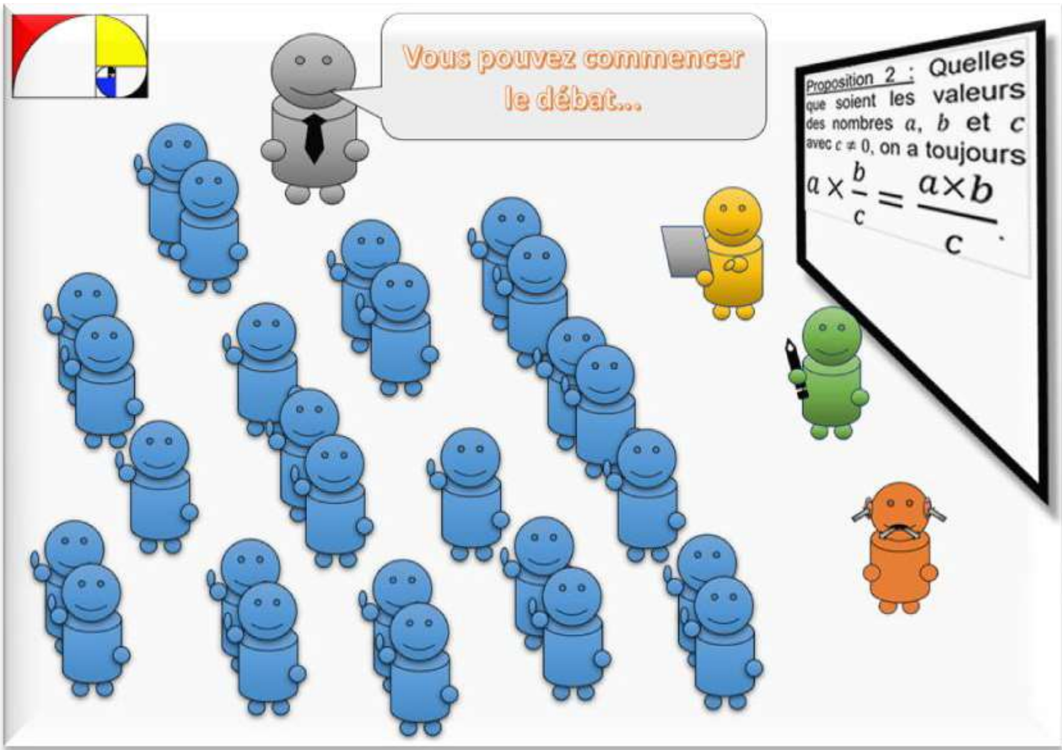
II – Démonstrations de résultats de cours

A. Démonstrations de résultats de cours sur les fractions en cinquième

Pascal FABREGUES
Collège CONDORCET de Pontault-Combault (77)
Niveau : 5ème
Durée : 5 séances



Dans le but de faire découvrir puis démontrer les propriétés $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$; $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$; $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, deux sortes d'activités ont été préparées :

- trois situations amenant à conjecturer les propriétés ;
- cinq propositions théoriques à démontrer ou à réfuter.

Ces travaux se sont étalés sur 5 séances de 55 minutes (moins 5 minutes de rituel « Question flash ») à la suite desquelles les élèves ont pu étudier une fiche de leçon récapitulative, puis s'entraîner sur des exercices fondamentaux et plus tard aborder des tâches à prise d'initiative.
Les deux dispositifs pédagogiques « Débat en classe » et « Recherche et présentation collaboratives » - cf. liens vers les vidéos de présentation dans cette brochure - sont plusieurs fois utilisés pour organiser l'expression des idées, induire des comportements concernés, et finalement conduire à la production de synthèses satisfaisant le plus grand nombre et conformes aux objectifs.
Deux classes de 5ème ont mené similairement ses travaux. Dans les comptes rendus qui suivent, leurs productions ont été indifféremment mélangées pour mettre en valeur leur intérêt.

Programmes de mathématiques

Extrait du bulletin officiel n° 30 du 26-7-2018

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes
Nombres Connaissances ➢ nombres décimaux (positifs et négatifs), notion d'opposé ; ➢ fractions, nombres rationnels (positifs et négatifs), notion d'inverse ; ➢ les carrés parfaits de 1 à 144 ; ➢ définition de la racine carrée ; ➢ les préfixes de nano à giga. Compétences associées ➢ utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; ➢ passer d'une représentation d'un nombre à une autre.
Comparaisons de nombres Connaissances ➢ égalité de fractions (démonstration possible à partir de la définition du quotient) ; ➢ ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire. Compétences associées ➢ comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire ou scientifique ➢ repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée ; ➢ associer à des objets des ordres de grandeur (par exemple taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, longueur de l'intestin, capacité de stockage d'un disque dur, vitesses du son et de la lumière, populations française et mondiale, distance Terre-Lune, distance du Soleil à l'étoile la plus proche, etc.).
Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté Connaissances ➢ somme, différence, produit, quotient de nombres décimaux, de deux nombres rationnels ; ➢ puissance d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs) ; ➢ notation scientifique. Compétences associées ➢ calculer avec des nombres relatifs, des fractions, des nombres décimaux ; ➢ vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ; ➢ effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique ; ➢ utiliser la racine carrée pour résoudre des problèmes, notamment géométriques ; ➢ effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes. *La mise en acte de produits et de quotients de puissances de même base résulte de l'application de la définition plutôt que de celle d'une formule.*

Repères de progression (classe de $5^{\text{ème}}$)

Fractions, nombres rationnels
La conception d'une fraction en tant que nombre, déjà abordée en sixième, est consolidée. Les élèves sont amenés à reconnaître et à produire des fractions égales (sans privilégier de méthode en particulier), à comparer, additionner et soustraire des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.
Au moins une des propriétés suivantes est démontrée, à partir de la définition d'un quotient : • $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$ • $a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$ • $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ • $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ Il est possible, à ce niveau, de se limiter à des exemples à valeur générique. Cependant, le professeur veille à spécifier que la vérification d'une propriété, même sur plusieurs exemples, n'en constitue pas une démonstration. Exemple de calcul fractionnaire permettant de démontrer que $\frac{3}{2}=\frac{15}{10}$ On commence par calculer $\frac{3}{2}\times 10$: $\frac{3}{2}\times 10=\frac{3}{2}\times(2\times 5)=\left(\frac{3}{2}\times 2\right)\times 5$ La définition du quotient permet de simplifier par 2, puisque $\frac{3}{2}$ est le nombre qui, multiplié par 2, donne 3. Donc : $\frac{3}{2}\times 10=\frac{3}{2}\times(2\times 5)=\left(\frac{3}{2}\times 2\right)\times 5=3\times 5=15$ $\frac{3}{2}$ multiplié par 10 donne 15. Ainsi, par définition du quotient, il vient donc que $\frac{3}{2}=\frac{15}{10}$.

Enoncés fournis aux élèves

NOMBRES EN ECRITURE FRACTIONNAIRE **5ème**

Activités *Pour chaque activité, participe au débat avec les questions et réponses qui te viennent à l'esprit.*

Activité 1 : Division impossible ?

Il est impossible de trouver un quotient exact pour la division de 7 par 3 !

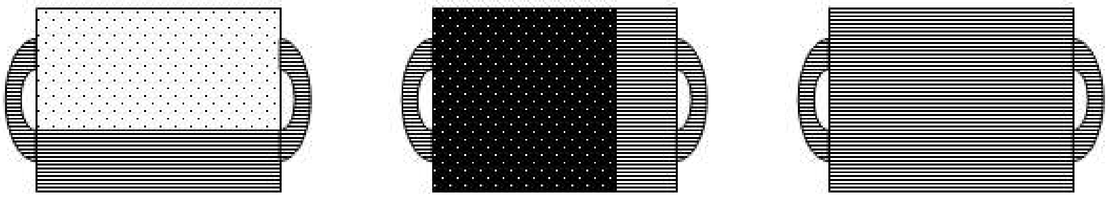
Les fractions rendent toutes les divisions possibles !

Activité 2 : Ce n'est pas de la tarte !

Honoré est apprenti vendeur chez un pâtissier.
Le pâtissier lui avait donné à vendre trois grands gâteaux rectangulaires de même taille.

A un client, il a vendu un tiers du gâteau à la vanille et un quart de celui au chocolat et celui au café tout entier.
Voilà ce qui reste :

Vanille Chocolat Café



Découvrant cela, le pâtissier n'est pas très satisfait :

« Allons ! On ne vend pas des morceaux de gâteaux ! On les vend tout entier !
Qui voudra acheter seulement trois quarts de gâteau ? Ou deux tiers de gâteau ?
On va être obligé de faire des parts individuelles en découpant les parties de gâteaux restantes.
Pour réparer ton erreur, tu vas choisir comment découper ces parts !
Mais qu'elles ne soient pas trop petites car il faut les vendre rapidement !
Et que les parts à la vanille aient la même taille que celles au chocolat pour faire une jolie présentation ! »

Activité 3 : Opérations.

Quand j'ajoute $\frac{7}{8}$ et $\frac{3}{4}$, cela fait $\frac{10}{12}$. Quand je les soustrais, cela fait $\frac{4}{4}$.

Je suis partagée ! Sept huitièmes de pizza, ça fait presque une pizza entière. Trois quarts d'une pizza, ça fait presque une autre pizza entière. Selon moi, la somme devrait faire plus qu'une pizza, presque deux !

Verso

Activité 4 : 5 propositions en 5 débats

Rappel : Quotient
Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$.
Le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir a, c'est-à-dire : $b \times \frac{a}{b} = a$

Parmi les propositions suivantes, lesquelles a-t-on le droit de mettre dans la leçon ? Justifier.

Proposition 1 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$.

Proposition 2 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$.

Proposition 3 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$.

Proposition 4 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Proposition 5 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Déroulement extrait du cahier de textes d'une classe

Séance 1
- Question flash.
- 1 fiche à coller dans le cahier : activités.
- Constitution des groupes pour la recherche des activités 1 à 3.
- Recherche des activités en petits groupes.
- Présentations de l'activité 1 par trois groupes.

Séance 2
- Question flash.
- Trace écrite de l'activité 1.
- Activité 5 proposition 1 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 1.
- Activité 5 proposition 2 en débat (Essai 1).

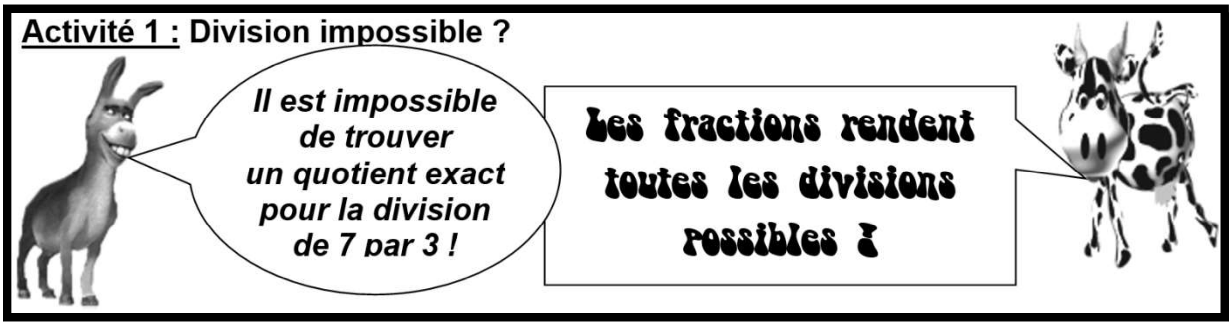
Séance 3
- Question flash.
- Activité 5 proposition 2 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 2.
- Présentations de l'activité 2 par deux groupes.

Séance 4
- Question flash.
- Trace écrite de l'activité 2.
- Activité 5 proposition 3 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 3.
- Présentation de l'activité 3 par un premier groupe.

Séance 5
- Question flash.
- Présentations de l'activité 3 par deux autres groupes.
- Trace écrite de l'activité 3.
- Activité 5 proposition 4 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 4.
- Activité 5 proposition 5 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 5.
- 2 fiches à coller dans le cahier : leçon et exercices.

Compte rendu : activité 1 puis activité 4 propositions 1 et 2

Après la question flash de début de séance, une vingtaine de minutes a été consacrée à la recherche des activités 1 à 3 par des groupes de trois à quatre élèves dans le but de les présenter ultérieurement à la classe (cf. « Recherches et présentations collaboratives » dans la présente brochure).
Ensuite, trois groupes ont successivement présenté leurs propositions pour l'activité 1.



Un groupe qui n'envisage que le quotient décimal, éventuellement infini.

$$\begin{array}{r|l} 7{,}00 & 3 \\ -6 & 2{,}3 \\ 1\,0 & \\ -9 & \\ 1\,0 & \end{array}$$

$7 \div 3 \approx 2{,}333$ / $\frac{7}{3} = 2{,}333\ldots$

Cela créé une boucle infinie.

Un groupe qui n'a pensé qu'au quotient entier.

$7 \div 3 = q = 2 \quad r = 1$

L'âne n'a pas raison car il est impossible de trouver le quotient exact car il y a un reste.

Un groupe qui propose un quotient exact en fraction sans en apporter la preuve.

$7 \div 3 = 2{,}3333333\ldots$

$7 \div 3 = \frac{7}{3}$

Le résultat de $7 \div 3 = \frac{7}{3}$ en fraction mais il n'y a pas de quotient exact en nombre simple
est égal à

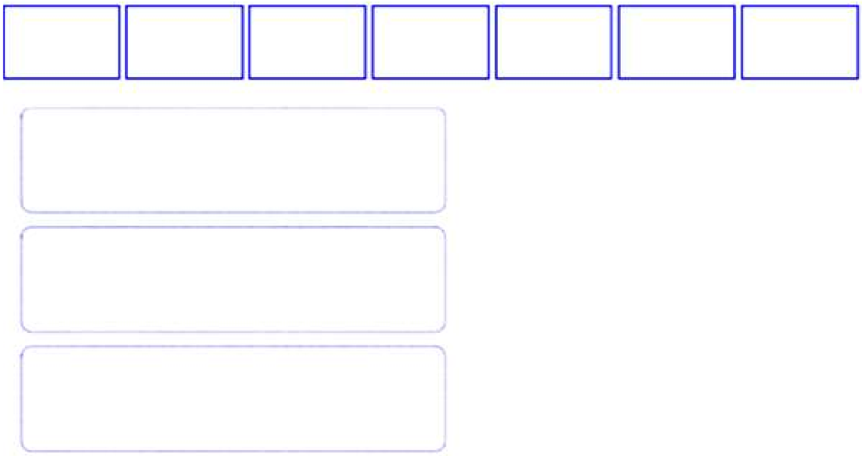
On peut obtenir un quotient inexact en nombre simple en écrivant 2,33... (En ajoutant le nombre de 3 qu'on veut)

Le groupe précise que la fraction a été affichée par la calculatrice comme résultat de 7 divisé par 3.

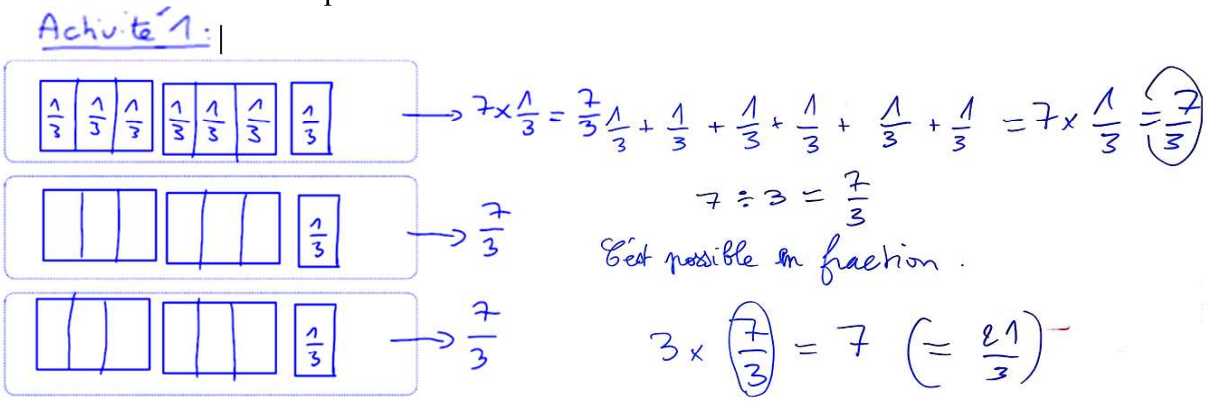
La séance se termine avec la conviction qu'il n'est pas possible de trouver le quotient exact sous forme décimale (une fois précisé que « décimal » signifie « avec un nombre fini de chiffres non nuls).
Elle se conclut toutefois dans le désaccord entre ceux qui pensent qu'il n'est pas du tout possible de trouver un quotient exact et ceux qui envisagent une partie décimale infinie alliés à ceux qui pensent à l'écriture fractionnaire.

Après la question flash de début, pour faire suite aux présentations de la fois précédente, la deuxième séance débute avec la projection au tableau de la problématique suivante.

7 gâteaux identiques à diviser en 3.



Un débat mène alors à la production de la trace écrite ci-dessous.



Je demande alors aux élèves leur avis sur le rappel proposé au début de l'énoncé de l'activité 4.

> Rappel : Quotient
> Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$.
> Le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir a, c'est-à-dire : $b \times \frac{a}{b} = a$

Les élèves s'expriment pour s'accorder sur sa similitude avec le résultat de l'activité, a et b aux places respectives de 7 et 3. Les élèves formulent la raison de l'emploi de lettres dans le rappel : c'est pour dire que c'est vrai pour tous les nombres, ou presque : la mention « $b \neq 0$ » est explicitée.

La proposition 1 de l’activité 4 est soumise au débat.

Proposition 1 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$.

Le débat est de courte durée, un élève proposant rapidement de remplacer les lettres par trois nombres choisis par ses soins.

Activité 4 proposition 1 :

Essai 1 :

$b = 3$

$c = 4$ $\quad \frac{2+4}{3+4} = \frac{6}{7} \neq \frac{2}{3}$

$a = 2$

La proposition est fausse.

C’est un contre-exemple.

La règle de priorité en cas de grande barre de fraction ayant déjà été vue, le calcul ne pose pas de problème. Et les élèves s’accordent sur le fait que $\frac{6}{7}$ diffère de $\frac{2}{3}$.

Le professeur fait remarquer qu’un seul exemple suffit pour démontrer qu’une proposition est fausse et qu’on le nomme alors : « contre-exemple ».

La proposition 2 de l’activité 4 est soumise au débat.

Proposition 2 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$.

La proposition 2 de l’activité 4 est soumise au débat.

Un élève propose immédiatement d’essayer avec des nombres de son choix.

essai1:

$a = 5 \quad b = 4 \quad c = 6$

Il veut qu’on écrive au tableau $5 \times \frac{4}{6} = \frac{5 \times 4}{6}$.

Mais, tiens donc ! Le professeur demande qu’on retire le « égal » tant qu’il n’est pas prouvé ! et qu’on tire un grand trait vertical pour examiner chacun des membres séparément.

$5 \times \frac{4}{6}$ | $\frac{5 \times 4}{6} = \frac{20}{6}$

Les élèves un peu étonnés y consentent et l'un d'eux intervient pour proposer un calcul du membre de droite.

$$\frac{5\times 4}{6}=\frac{20}{6}$$

Le professeur interroge alors sur la signification de $\frac{20}{6}$. Des évocations de partages sont dites mais pas de référence à la définition du quotient. Le professeur reprend le rappel pour dégager : $6\times\frac{20}{6}=20$. Il souligne que *par définition*, $\frac{20}{6}$ est le nombre qui, multiplié par 6, donne 20.

Les élèves ont l'air perplexe car, bien que $6\times\frac{20}{6}=20$ leur soit familier, ils ne voient pas encore en quoi cette gymnastique mentale va permettre de prouver l'égalité avec $5\times\frac{4}{6}$.

L'affichage en est là :

$$5\times\frac{4}{6}$$

$$\frac{5\times 4}{6}=\frac{20}{6}$$

$$6\times\frac{20}{6}=20$$

Le professeur rompt le silence qui s'installe en amenant les élèves à adhérer et à verbaliser avec lui le raisonnement suivant :

A droite, quand on multiplie $\frac{20}{6}$ par 6, ça fait 20. Pour que le calcul $5\times\frac{4}{6}$ de gauche soit égal au nombre $\frac{20}{6}$ à droite, on va multiplier $5\times\frac{4}{6}$ par 6, en espérant trouver 20.

En soulignant les associations et commutativités, puis en utilisant à nouveau la définition du quotient ($6\times\frac{4}{6}=4$), on trouve bien le résultat 20. La séance se termine avec l'écriture de l'égalité tant espérée !

$$5\times\frac{4}{6}$$

$$\begin{aligned}&6\times\left(5\times\frac{4}{6}\right)\\ &=(6\times 5)\times\frac{4}{6}\\ &=(5\times 6)\times\frac{4}{6}\\ &=5\times\left(6\times\frac{4}{6}\right)\\ &=5\times 4\\ &=20\end{aligned}$$

$$\frac{5\times 4}{6}=\frac{20}{6}$$

$$6\times\frac{20}{6}=20$$

$$\boxed{5\times\frac{4}{6}=\frac{5\times 4}{6}}$$

Après la question flash de début de séance, le premier essai est projeté au tableau numérique. Il est alors demandé aux élèves de procéder à un deuxième essai en réécrivant le premier avec trois autres nombres. Les élèves choisissent 1 ; 2 et 3 pour remplacer les lettres a, b et c.

Essai 2 :

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3$

$1 \times \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{1 \times 2}{3} = \frac{2}{3}$

$3 \times \left(1 \times \frac{2}{3}\right)$ $\qquad$ $3 \times \frac{2}{3} = 2$

$= (3 \times 1) \times \frac{2}{3}$

$= (1 \times 3) \times \frac{2}{3}$

$= 1 \times \left(3 \times \frac{2}{3}\right)$

$= 1 \times 2$

$= 2$

$$\boxed{1 \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{3}}$$

Il est ensuite souligné que ces deux exemples prouvent que la propriété est vraie deux fois, pour les nombres choisis. Les élèves acquiescent sur le fait que ça ne prouve pas qu'elle soit vraie pour l'infinité des nombres possibles. Le professeur énonce que pouvoir écrire autant de fois qu'on veut un nouvel essai en remplaçant de manière automatique les nombres anciens par des nouveaux, et que tout soit alors bien correct, amène à conjecturer que c'est reproductible à l'infini.
Une conjecture est énoncée et la preuve est rédigée pas à pas, assez lentement, en soulignant d'une part les correspondances entre les essais numériques et la présente démonstration, d'autre part en précisant systématiquement à l'oral les propriétés employées (associativité, commutativité, définition du quotient).

Essai 2 :

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3$

$1 \times \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{1 \times 2}{3} = \frac{2}{3}$

$3 \times \left(1 \times \frac{2}{3}\right)$ $\qquad$ $3 \times \frac{2}{3} = 2$

$= (3 \times 1) \times \frac{2}{3}$

$= (1 \times 3) \times \frac{2}{3}$

$= 1 \times \left(3 \times \frac{2}{3}\right)$

$= 1 \times 2$

$= 2$

$$\boxed{1 \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{3}}$$

Conjecture : c'est vrai.

Preuve : $\quad a \times \frac{b}{c}$ $\quad | \quad$ $\frac{a \times b}{c}$

$c \times \frac{a \times b}{c} = \boxed{a \times b}$

$c \times \left(a \times \frac{b}{c}\right) = (c \times a) \times \frac{b}{c}$

$= (a \times c) \times \frac{b}{c}$

$= a \times \left(c \times \frac{b}{c}\right)$ $\qquad$ $c \times \frac{b}{c} = b$

$= \boxed{a \times b}$

Pour tous nombres a, b, c avec $c \neq 0$: $\boxed{a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}}$

La discussion porte ensuite sur la validité de la preuve avec des lettres, il est précisé que *l'utilisation des lettres permet la généralisation*. L'écriture avec des lettres est vraie pour toutes les valeurs possibles que peuvent prendre ces lettres, ou presque : la mention « $c \neq 0$ » est à nouveau expliquée.
Quelques mots rassurants sont nécessaires pour lever l'inquiétude qui se lit dans certains regards et qui s'exprime par la question : « Est-ce qu'on l'aura en contrôle ? ». *Le professeur assure que ce genre d'activité sera toujours menée en séance de classe, sans évaluation, sous la guidance du professeur ; l'objectif étant de s'habituer d'une part à l'utilisation des lettres pour généraliser, d'autre part d'intégrer peu à peu la démarche « essais, conjecture, preuve ».*

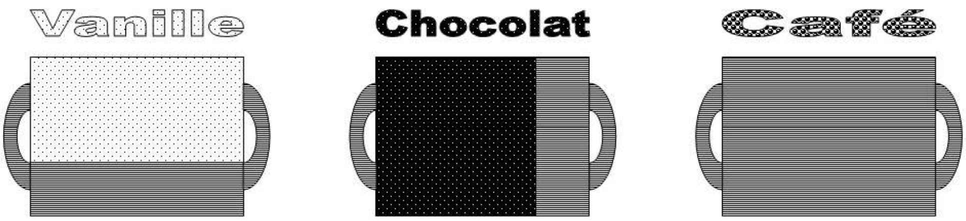
Compte rendu : activité 2 puis activité 4 proposition 3

Il faut préalablement noter que le choix de démontrer en premier la propriété $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$ n'est pas dû au hasard. Cette propriété va servir de lemme utilisé dans la démonstration de la suivante.
Deux groupes ont successivement présenté leurs propositions pour l'activité 2.

<u>Activité 2 :</u> Ce n'est pas de la tarte !

Honoré est apprenti vendeur chez un pâtissier.
Le pâtissier lui avait donné à vendre trois grands gâteaux rectangulaires de même taille.

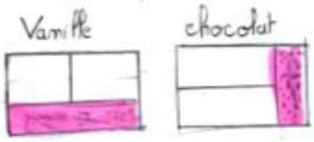
A un client, il a vendu un tiers du gâteau à la vanille et un quart de celui au chocolat et celui au café tout entier.
Voilà ce qui reste :



Découvrant cela, le pâtissier n'est pas très satisfait :

« Allons ! On ne vend pas des morceaux de gâteaux ! On les vend tout entier !
Qui voudra acheter seulement trois quarts de gâteau ? Ou deux tiers de gâteau ?
On va être obligé de faire des parts individuelles en découpant les parties de gâteaux restantes.
Pour réparer ton erreur, tu vas choisir comment découper ces parts !
Mais qu'elles ne soient pas trop petites car il faut les vendre rapidement !
Et que les parts à la vanille aient la même taille que celles au chocolat pour faire une jolie présentation ! »

Un groupe qui n'a pas bien intégré qu'il fallait découper en parts identiques (confondant peut-être « parts identiques » et « même nombre de parts » ?).



Cela fait trois parts pour chaque gâteau.

On a découpé les parts de vanille à la verticale.
On a découpé les parts de chocolat à l'horizontal

Donc les parts sont égales.

Un groupe qui a bien dessiné les découpages et qui a envisagé les douzièmes.

Un apprenti pâtissier a vendu à un client
- $\frac{1}{3}$ de gâteau à la vanille
- $\frac{1}{4}$ de gâteau au chocolat
- le gâteau au café entier

Donc il reste :
- $\frac{2}{3}$ de gâteau à la vanille
- $\frac{3}{4}$ de gâteau au chocolat

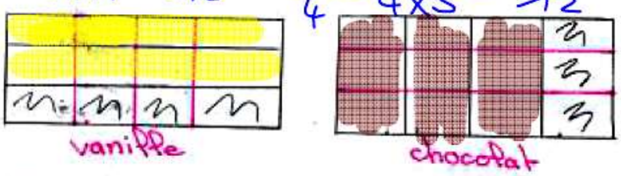
Il reste $\frac{8}{12}$ de gâteau à la vanille et $\frac{9}{12}$ de gâteau au chocolat.
Il y a donc plus de chocolat.

La séance se termine sur le questionnement de ce groupe.

Après la question flash de début de séance, un débat permet d'élaborer la trace écrite suivante incluant l'introduction des notations avec le même multiplicateur au numérateur et au dénominateur.

Activité 2 :

$\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$ $\quad$ $\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$



Il reste $\frac{8}{12}$ de gâteau à la vanille et $\frac{9}{12}$ de gâteau au chocolat.
Il y a donc plus de chocolat.

La proposition 3 de l'activité 4 est soumise au débat.

Proposition 3 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a\times c}{b\times c} = \frac{a}{b}$.

Sous la conduite du professeur, les élèves suivent la même trame que pour la proposition 2 : des essais, une discussion sur la validité de ces essais, une conjecture, une preuve littérale, une conclusion sur la validité et la portée de cette preuve. On remarquera que la propriété $a \times \frac{b}{c} = \frac{a\times b}{c}$, précédemment démontrée, est plusieurs fois utilisée.

Essai 1 : $\frac{2\times4}{3\times4} = \frac{2}{3}$

$3\times\frac{2}{3} = 2$

$3\times\frac{2\times4}{3\times4}$

$= 3\times\frac{8}{12}$

$= \frac{3\times8}{12} = \frac{24}{12} = 2$

$\frac{2\times4}{3\times4} = \frac{2}{3}$

Essai 2 : $\frac{3\times3}{4\times3} = \frac{3}{4}$

$4\times\frac{3}{4} = 3$

$4\times\frac{3\times3}{4\times3}$

$= 4\times\frac{9}{12}$

$= \frac{4\times9}{12} = \frac{36}{12} = 3$

$\frac{3\times3}{4\times3} = \frac{3}{4}$

Conjecture : c'est vrai.

Preuve :

$\frac{a\times c}{b\times c}$

$b\times\frac{a\times c}{b\times c} = \frac{b\times a\times c}{b\times c}$

$= \frac{a\times b\times c}{b\times c}$

$= a\times\frac{b\times c}{b\times c}$

$= a\times1$

$= a$

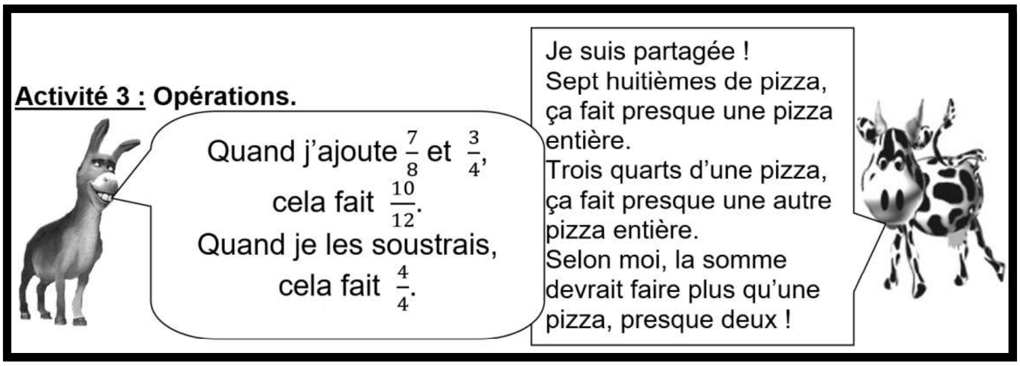
$\frac{a}{b}$

$b\times\frac{a}{b} = a$

Conclusion :
Pour tous a, b, c avec $b\neq0$; $c\neq0$
$\frac{a\times c}{b\times c} = \frac{a}{b}$

Compte rendu : activité 3 puis activité 4 propositions 4 et 5

Un premier groupe présente ses propositions pour l'activité 3.



Il a écrit les résultats donnés par la calculatrice.

Âne = faux car $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \frac{13}{8}$

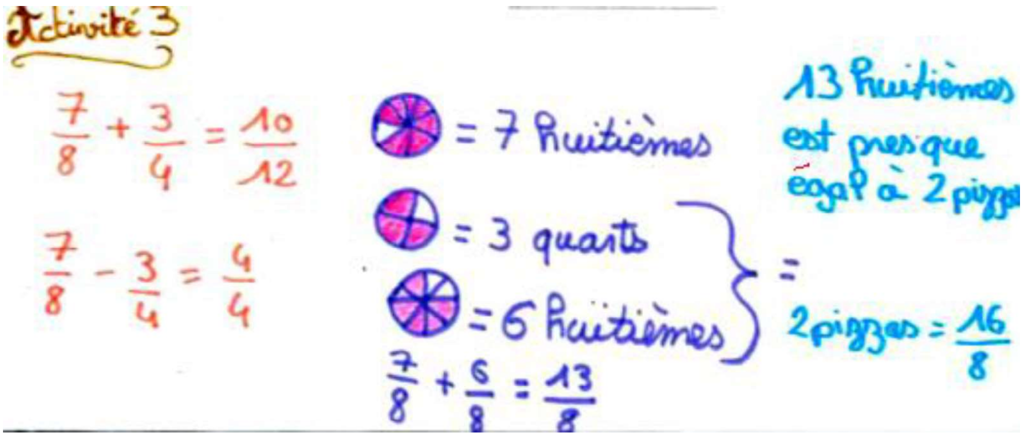
non pas $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12}$

Vache =

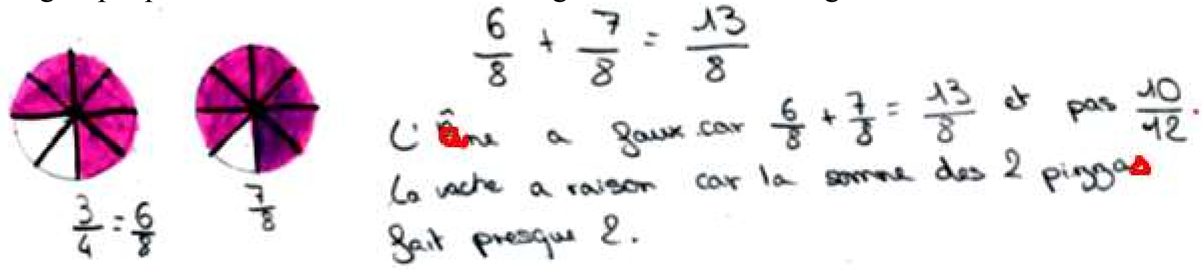
La séance se termine sur cette présentation.

Après la question flash de début de séance, deux groupes présentent leurs propositions pour l'activité 3.

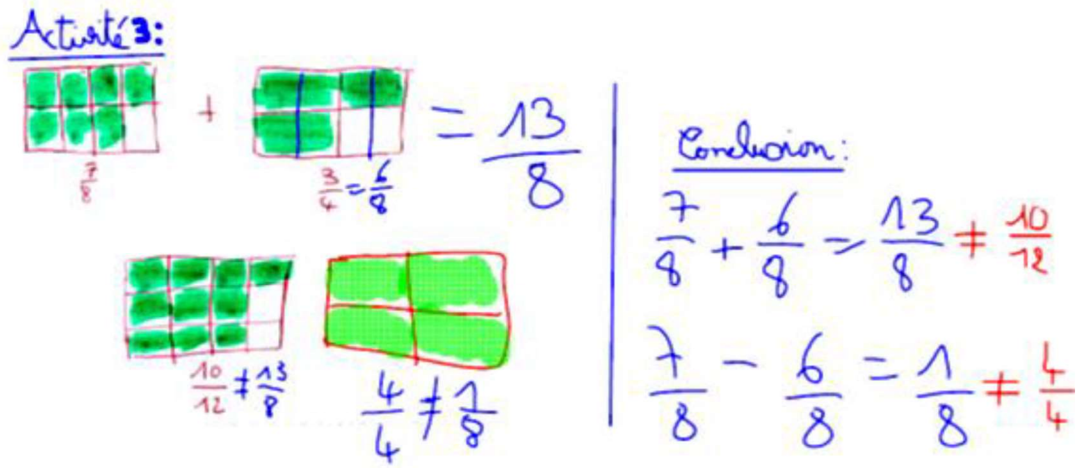
Un groupe qui écrit les égalités fausses puis explique que la première n'est pas possible en illustrant les propos de la vache. Il est souligné qu'il est fort gênant de laisser des égalités fausses sans aucun avertissement écrit les accompagnant.



Un groupe qui mène un raisonnement analogue en écrivant une égalité de fraction.



Le débat qui fait suite amène à la trace écrite suivante.



Il est remarqué qu'il est nécessaire de mettre les fractions au même dénominateur pour les ajouter ou les soustraire.

La proposition 4 de l'activité 4 est soumise au débat.

<u>Proposition 4 :</u> Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Sous la conduite du professeur, les élèves suivent la même trame que pour les propositions 2 et 3 : des essais, une discussion sur la validité de ces essais, une conjecture, une preuve littérale, une conclusion sur la validité et la portée de cette preuve. Il faut savoir que la notion de distributivité, à ce stade de l'année, n'a été travaillée que sur le plan numérique. Le rappel de cette notion par le professeur est nécessaire. Son utilisation, avec des fractions ou des lettres, considérés en tant que nombres, est une première pour les élèves.
L'activité 3 constituant un premier essai, il est convenu que le prochain essai qu'on écrira se nommera essai n°2. Voici la trace écrite élaborée en débat :

Activité 4 : proposition 4 :

Essai n°2 :

$a=4$
$b=3$
$c=2$

$\frac{4}{2}+\frac{3}{2}$

$2\times\frac{4}{2}=4$

$2\times\frac{3}{2}=3$

$$2\times\left(\frac{4}{2}+\frac{3}{2}\right)=2\times\frac{4}{2}+2\times\frac{3}{2}$$
$$=4+3$$
$$=7$$

$\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$

$2\times\frac{7}{2}=7$

Conclusion :
$\frac{4}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4+3}{2}$

Preuve :

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\stackrel{?}{=}\frac{a+b}{c} \longrightarrow c\times\frac{a+b}{c}=a+b$

$c\times\frac{a}{c}=a \qquad c\times\frac{b}{c}=b$

$$c\times\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)=c\times\frac{a}{c}+c\times\frac{b}{c}$$
$$=a+b$$

conclusion :
$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$

quelque soient a, b, c avec $c\neq 0$

La proposition 5 de l'activité 4 est soumise au débat.

<u>Proposition 5 :</u> Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

Il est rapidement convenu que c'est quasi similaire à la proposition 4. On se contente ainsi de la trace écrite ci-dessous.

Proposition 5 : pareil avec moins.

Observations et remarques

Quelques observations liées à ces travaux :

• Il faut noter l'habituelle « perte » de quelques élèves dans les moments de démonstrations les plus théoriques, avec des écritures littérales. Mais le plus grand nombre semblait suivre.

• Bien que comprise et rédigée aisément par le plus grand nombre, la définition du quotient devait à chaque fois être amenée par le professeur au moment opportun. Quand elle faisait besoin pour avancer dans une démonstration, l'idée de l'utiliser ne venait jamais. Malgré les travaux menés au cycle 3, les élèves évoquent encore trop les fractions comme des partages et pas assez comme des nombres. Cela dit, c'est bien normal puisque c'est un objectif du cycle 4 qui commence à peine.

• Les élèves ont obtenu en très grande majorité de bons résultats au test de leçon qui demandait ensuite de réciter les formules littérales vues.

• Le temps d'entraînement qui a fait suite à ces activités a porté sur des exercices fondamentaux utilisant les propriétés vues. Les élèves ont le plus souvent trouvé naturel d'extraire une formule du cours, d'y remplacer les lettres par les nombres donnés afin de trouver comment rédiger et mener correctement les calculs demandés.

Quelques remarques d'ordre général :

• L'alternance entre les dispositifs pédagogiques « Recherches et présentations collaboratives » et « Débat en classe » permet de partir des représentations concrètes des élèves pour amener ces derniers à des considérations plus théoriques finales pour lesquelles le professeur doit apporter son expertise.

• Les six compétences « Chercher », « Modéliser », « Raisonner », « Calculer » « Représenter » et « Communiquer » sont au cœur de ces activités.

• Le statut des fractions ou de lettres en tant que nombres constitue une nouvelle forme d'abstraction avec laquelle l'élève se familiarise peu à peu.

• Au fur et à mesure de l'avancement de ces activités, des manières de raisonner se sont progressivement installées :

➢ la démarche « essai », « conjecture », « preuve » ;
➢ le remplacement des lettres par des nombres ;
➢ le remplacement des nombres par des lettres ;
➢ la valeur limitée d'une démonstration numérique : un exemple ou plusieurs ;
➢ la réfutation avec un contre-exemple ;
➢ la valeur universelle d'une démonstration littérale : usage de lettres afin de généraliser à tous les nombres ;
➢ le « parallélisme » entre les démonstrations numériques et littérales ;
➢ la justification d'une nouvelle propriété en utilisant celles qui sont déjà démontrées ;
➢ le nécessaire positionnement de conditions d'exclusions comme « $c \neq 0$ ».

Toutefois leur encrage demandera bien d'autres mises en activités, au cycle 4 et au-delà.

B. Démontrer en calcul littéral

Martine BRUNSTEIN – Collège du Parc de Sucy en Brie (94)
Niveau : $4^{\text{ème}}$ ou $3^{\text{ème}}$

Les élèves étant disposés en îlots lorsqu'ils sont en cours de maths, cette activité est proposée très rapidement en travail de groupe en fin de cours dans le dernier quart d'heure d'une séance et cela pendant 3 ou 4 séances consécutives.
Dans le manuel utilisé en classe (« Mission Indigo » classe de $3^{\text{ème}}$ Hachette-Education), ce type d'exercices est récurrent dans plusieurs chapitres. Et plusieurs entrainements peuvent donc être envisagés.
Quelques règles sont toujours rappelées :
- Règle 1 : Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux.
- Règle 2 : Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas pour prouver que cet énoncé est vrai dans tous les cas.
- Règle 3 : Un exemple qui ne vérifie pas un énoncé suffit pour prouver que cet énoncé est faux.

Cet exemple est appelé « contre-exemple ».

Les élèves sont déjà habitués au protocole suivant : tester-observer-conjecturer-expliquer et ils ont déjà lors de débats oraux utilisé des contre-exemples. De vraies discussions ont lieu entre les membres d'un même groupe avec des explications très vives pour les plus en difficulté.
Chaque élève doit avoir compris et doit être capable de l'expliquer ensuite oralement lors de la correction collégiale. Une seule feuille de synthèse est par ailleurs relevée.

Voici un exemple :

Exercice 76 p 33 Mission Indigo manuel utilisé en classe

Voici quelques extraits de copies :

Kim : Cette affirmation est fausse car lorsque les signes sont opposes, voir exemple.

Ex : $3 \times 3 = 9$ ~~-9~~ est l'opposé de -9.

$(-3) \times (-3) = 9$

$9 \neq -9$

Kim : Son affirmation est fausse car : $2 \times 5 = 10$ et que $-2 \times -5 = 10$. Les produits sont égaux car $(10 = 10)$. Et si on effectue : $-2 \times 5 = -10$ et $2 \times (-5) = -10$ Les produits sont égaux $(-10 = -10)$ Ce qui prouve que cette affirmation est fausse

Vérification par un exemple et généralisation non faite :

Esteban:

Cette affirmation est vrai car

ex: $3 \times 3 = 9$ $\quad -3 \times (-3) = 9$

Le carré de ces nombre relatifs est toujours positifs.

Généralisation tout de suite envisagée par le groupe :

Esteban : son affirmation est correcte car si on multiplie deux nombres de même signe on obtient un resultat positif. puis on multiplie les distances à 0

L'affirmation de Lucas est celle qui a été trouvée le plus vite par l'ensemble des groupes et tout de suite généralisée :

Lucas:

Cette affirmation est fausse car le quart de 100 est égale à 25 positif donc il y a 75 nombre négatif. Il y a donc un nombre impair de nombre négatif. Donc le produit est négatif.

Utilisation d'un contre-exemple :

Léla à Faux car

$3^3 = 3 \times 3 \times 3$

$3^3 = 27$

$-3^3 = -3 \times -3 \times -3$

$-3^3 = -27$

Donc c'est Faux

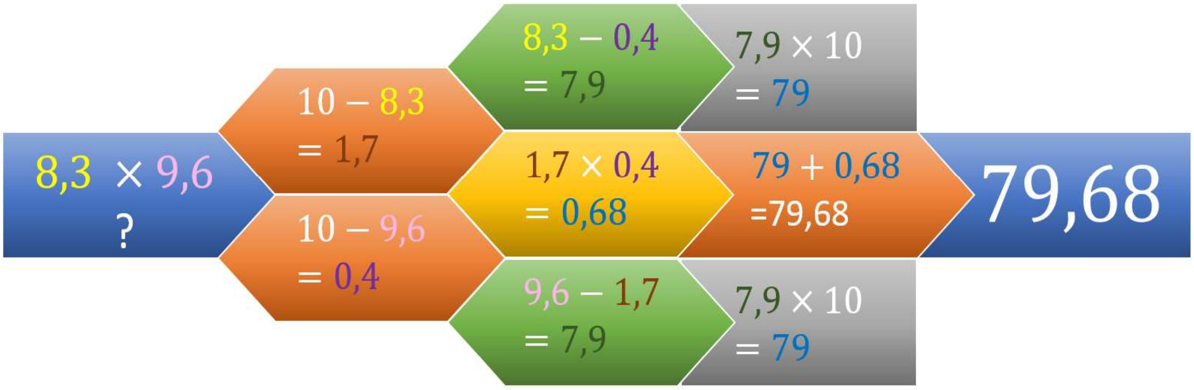
CHERCHER
S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.

RAISONNER
Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.
Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.
Domaines du socle : 2, 3, 4

COMMUNIQUER
Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.
Vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes.
Domaines du socle : 1, 3

C. Grâce à la démonstration

Mohammed MESMOUDI
Collège JY COUSTEAU, Bussy St Georges(77)
Niveau : $3^{ème}$
Durée : 2 séances



Certains élèves ont du mal à retenir les tables de multiplication à partir de 5. On leur propose parfois d'autres techniques pour calculer mentalement des produits utilisant des chiffres dépassant 5.

Cet article étudie une de ces techniques et la démontre.

En faisant la démonstration, on se rend compte que l'on peut étendre cette technique bien au-delà, à des produits faisant intervenir des facteurs plus grands que 10, et même à des nombres décimaux. Cela aboutit alors à une magnifique technique de calcul mental très utile pour faire des produits du type 103×107 ou alors $99{,}8 \times 98{,}5$.
La démonstration fait appel au calcul littéral et aux compétences qui lui sont rapportées. De celle-ci, on déduit un algorithme de calcul qui fait parfois intervenir les nombres relatifs.
Il est également possible de faire une interprétation géométrique en transformant des rectangles et en travaillant sur leurs aires.

Objectifs pédagogiques

- Découvrir une méthode originale de calcul mental de produits.
- Déduire un algorithme de calcul.
- Initiation à la démonstration : Mobiliser ses connaissances pour démontrer une propriété mathématique.
- Revisiter les opérations sur les relatifs et le calcul littéral.

Les consignes et la réalisation attendue

Travail en petits groupes :
- Tester la méthode sur différents produits.
- Trouver une démonstration pour pouvoir la valider.
- Demander l'aide à l'enseignant si nécessaire.
- Chaque groupe doit rendre une copie contenant ses tests, ses traces de recherche et une tentative de démonstration.

Compétences mathématiques principalement mobilisées

Cette activité permet de développer en particulier les compétences mathématiques :

Chercher : l'élève s'engage dans une démarche scientifique ; observer ; questionner ; manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses ; chercher des exemples ou des contre-exemples ; émettre une conjecture. Tester ; essayer plusieurs pistes de résolution. Décomposer un problème en sous-problèmes.
Représenter : l'élève mobilise la compétence « représenter » pour choisir et mettre en relation des cadres numériques, algébriques et géométriques.
Raisonner : l'élève mobilise la compétence « raisonner » lorsqu'il mène collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui. Il démontre en utilisant un raisonnement logique et des règles établies (formules et propriétés).
Communiquer : l'élève mobilise la compétence « communiquer » lorsqu'il explique à l'écrit sa démarche, son raisonnement. Comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.
Calculer : l'élève mobilise la compétence « calculer » lorsqu'il calcule de manière exacte en combinant de manière appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (pour les grands nombres). Il calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, ...)
Modéliser : l'élève mobilise la compétence « modéliser » lorsqu'il compare une situation à un modèle connu. Il valide ou invalide le modèle.

Compétences mobilisées du socle

➢ Domaine 1 : Les langages pour penser et communiquer
L'élève parle pour exprimer une opinion, une argumentation. L'élève rédige une réponse écrite développée et argumentée. L'élève utilise le langage mathématique (citer et utiliser une expression littérale, mettre un problème en équation, ...).
➢ Domaine 2 : Les méthodes et outils pour apprendre
L'élève sait identifier un problème, organise sa réponse seul ou en groupe, laisse une trace de ses activités.
➢ Domaine 3 : La formation de la personne et du citoyen
L'élève comprend et respecte les règles communes, s'implique dans la mise en place d'un travail commun dans le respect d'autrui.
➢ Domaine 4 : Les systèmes naturels et les systèmes techniques
L'élève pratique le calcul, mental et écrit, exact et approché, il estime et contrôle les résultats, notamment en utilisant les ordres de grandeur. L'élève mène une démarche d'investigation, manipule, modélise et résout des problèmes.

Déroulé

L'activité s'étend sur deux séances. Un quart d'heure pour la mise en place de l'activité (explications, quelques exemples, répartition des élèves en petits groupes). Une phase de tests et de recherches de 20 min à 30 min. Une phase de rédaction avec aides ponctuelles du professeur. Au cours de la deuxième séance, correction de l'activité en utilisant les travaux des élèves. Synthèse générale (retour sur les fautes commises par les élèves, les étapes de la démonstration, la rédaction...).

Analyse

Une bonne partie de l'activité est à la portée de tous les élèves.
La mise en place est facile.
Les élèves rentrent rapidement dans l'activité, même les plus en difficulté.
Un vrai échange se crée entre les élèves.
Les élèves appellent facilement le professeur pour lui présenter leurs idées et lui demander de l'aide.

Annexe

Cette activité peut être réexploitée en cours de géométrie sur les transformations en faisant une interprétation géométrique de la multiplication. L'article présente comment on pourrait aborder ce sujet avec les élèves.

Technique de multiplication utilisant les compléments à 10

Voici comment calculer le produit de 8 par 6 :
- Le complément à 10 de 8 est 2 et celui de 6 est 4.
- On multiplie 2 par 4. On obtient 8, ce sera le chiffre des unités.
- On calcule ensuite la différence 8 – 4 = 4 ou bien 6 – 2 = 4 (et là, première surprise : on a le même résultat). Ce dernier est le chiffre des dizaines.
- Le résultat est alors 48. Bravo !!!

Et si l'on permutait 6 et 8 ? À vous de répondre...

Voici un autre exemple : On calcule le produit de 7 par 9, c'est encore plus simple !!!
- Le complément à 10 de 7 est 3 et celui de 9 est 1.
- On multiplie alors 3 par 1, on obtient 3.
- On calcule ensuite la différence 7 − 1 = 6 ou bien 9 − 3 = 6 (on retrouve encore le même résultat). Ce dernier est le chiffre des dizaines.

Le résultat est alors 63. Ça a l'air de fonctionner !!!

On peut tester cette technique sur d'autres exemples 9×8 ; 7×7 ; 8×7 ; 6×9. À chaque fois, on s'aperçoit qu'on obtient le bon résultat. On conjecture ainsi un algorithme pour faire de telles multiplications.

Par curiosité, observons ce qui se passe si l'on essaye cet algorithme sur d'autres produits avec des chiffres qui ne sont pas forcément plus grand que 5 ? Prenons un exemple : 3×9 ou un autre : 4×4.

Pour 3×9 :
- Le complément à 10 de 3 est 7 et celui de 9 est 1.
- On multiplie alors 7 par 1, on obtient 7.
- On calcule ensuite la différence 3 − 1 = 2 ou bien 9 − 7 = 2 (on retrouve le même résultat). Ce dernier est le chiffre des dizaines.

Le résultat est alors 27.

Pour 4×4 :
- Le complément à 10 de 4 est 6.
- On multiplie alors 6 par 6, on obtient 36. Ce n'est plus un chiffre !!!
- On calcule ensuite la différence 4 − 6 = –2. C'est un nombre négatif. Dans l'algorithme, on l'affectait aux dizaines. Cela ne marche pas ici, sauf si l'on voit ce résultat comme étant –20.
- Dans ce cas comment récupérer 16 (qui est égal au produit de 4 par lui-même) à partir 36 et de –20 ?
- La réponse, vous la connaissez, est d'ajouter simplement 36 + (–20) = 16. Et là, on est sur une somme de nombres relatifs.

L'algorithme de calcul doit être réadapté si l'on veut faire des produits de cette manière.

Prenons un autre exemple 2×5 :
• Le complément à 10 de 2 est 8 et celui de 5 est 5.
• On multiplie alors 8 par 5, on obtient 40.
• On calcule ensuite la différence 2 – 5 = –3 ou bien 5 – 8 = –3 (on retrouve le même résultat). À ce dernier, on lui affecte la valeur -30.
• Le résultat est alors –30 + 40 = 10.

Un dernier exemple : 6×3 :
• Le complément à 10 de 6 est 4 et celui de 3 est 7.
• On multiplie alors 4 par 7, on obtient 28.
• On calcule ensuite la différence 6 – 7= –1 ou bien 3 – 4 = –1. On affecte à ce résultat la valeur –10.
Le résultat est alors –10 + 28 = 18.

Même si cela peut donner l'impression d'avoir rendu les choses plus complexes pour des élèves ayant des difficultés de calcul, la suite va montrer qu'il est possible d'exploiter cet algorithme pour faire des calculs intéressants, et pas seulement pour des élèves en difficulté. Mais procédons d'abord à la démonstration de cette technique.

Démonstration

Notons par x et y les facteurs à multiplier. (A priori, ces facteurs sont des chiffres.) Le produit est xy.
Passons maintenant par les compléments à 10 et faisons le produit :
$(10-x)(10-y)$.
En réduisant cette expression puis en factorisant partiellement 10, on obtient :
$(10-x)(10-y) = 100 - 10(x+y) + xy$,
D'où : $xy = (10-x)(10-y) + 10(x+y) - 100$ (*)
On factorise 10 dans l'expression $10(x+y) - 100$, ce qui donne : $10(x+y-10)$.
Le facteur $x+y-10$correspond à la troisième étape de l'algorithme où il fallait faire les différences croisées : $x-(10-y) = x+y-10$ ou bien $y-(10-x) = x+y-10$.
Les deux différences donnent $x+y-10$. C'est cette dernière expression qu'on affecte aux dizaines, c'est à dire qu'il faut la multiplier par 10, ce qui donne évidement $10(x+y-10)$.

La relation (*) peut alors s'écrire sous la forme :
$xy = \underbrace{(10-x)(10-y)}_{\text{Multiplication des compléments à 10}} + \underbrace{10\big(x-(10-y)\big)}_{\text{la différence entre un nombre et le complément à 10 de l'autre est associée aux dizaines}}$ (**)

Dans la relation (**), la première expression correspond aux deux premières étapes de l'algorithme, la multiplication des compléments à 10. La deuxième expression correspond à la troisième étape de l'algorithme, la différence croisée entre un nombre de départ x (ou y) et le complément à 10 de l'autre nombre, $10-y$ (ou $10-x$).
La somme des deux expressions donne bien xy et correspond à la dernière étape de l'algorithme.

Discussion

Même si on a supposé au départ que x et y étaient des chiffres, on n'a aucunement utilisé ce fait. La démonstration reste donc valable pour tous les nombres quelle que soit leur nature.
C'est cette dernière conclusion qui va nous permettre de faire des calculs mentaux rapides dans le cas de quelques produits.

1. Produit de nombres décimaux proches de 10

Appliquons cet algorithme pour calculer certains produits proches de 10, par exemple $8{,}3 \times 9{,}6$. Ce produit est égal à 79,68 (calcul posé ou une calculatrice).
Avec l'algorithme :

- Le complément à 10 de 8,3 est 1,7 et celui de 9,6 est 0,4.
- On multiplie alors 1,7 par 0,4 on obtient 0,68 (ce calcul peut être fait mentalement).
- On calcule ensuite la différence 8,3 – 0,4 = 7,9.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 79.
- Le résultat est alors 79 + 0,68 = 79,68.

Faisons encore un autre exemple : $9{,}8 \times 9{,}4$ qui est égal à 92,12.
Avec l'algorithme :

- Le complément à 10 de 9,8 est 0,2 et celui de 9,4 est 0,6.
- On multiplie alors 0,2 par 0,6 on obtient 0,12.
- On calcule ensuite la différence 9,8 -0,6 = 9,2.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 92.
- Le résultat est alors 92 + 0,12 =92,12.

2. Produits de deux nombres entre 10 et 20

Appliquons l'algorithme pour calculer par exemple : 14×15. Dans ce cas, on ne peut pas parler du complément puisqu'on dépasse 10. On pourra parler d'un "complément généralisé" à 10, dans ce cas le "complément généralisé" d'un nombre plus grand que 10 est négatif. Par abus de langage, on garde pour cet exemple l'appellation « complément à 10 » pour faire simple.

- Le « complément à 10 » de 14 est 10 – 14 = –4 et celui de 15 est 10 – 15 = –5.
- On multiplie alors –4 par –5 on obtient 20.
- On calcule ensuite la différence 14 – (–5) = 14 + 5 =19.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 190.
- Le résultat est alors 190 + 20 =210.

Avec cet exemple le produit des « complément à 10 » est positif. On peut remplacer alors le « complément à 10 » par l'écart à 10. En revanche, il faut remplacer la différence croisée par une addition croisée d'un nombre de départ avec l'écart à 10 de l'autre nombre.

Appliquons ce nouvel algorithme au produit 17×18 qui, on le sait, est égal à 306.

- L'écart à 10 de 17 est 7 et celui de 18 est 8.
- On multiplie alors 7 par 8 on obtient 56.
- On calcule ensuite la somme 17 + 8 = 25.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 250.
- Le résultat est alors 250 + 56 =306.

3. Produits de deux nombres plus petits que 20

Par exemple 17×8. Utilisons l'algorithme initial avec les compléments à 10.
- Le « complément à 10 » de 17 est –7 et celui de 8 est 2.
- On multiplie alors –7 par 2 on obtient -14.
- On calcule ensuite la différence 17 – 2 = 15 ou bien 8 – (–7) = 15 aussi.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 150.
- Le résultat est alors 150 + (–14) =136.

4. Produits de nombres proches de 100

La démonstration faite plus haut reste valable si l'on remplace 10 par 10^2 ou bien par une autre puissance de 10. L'algorithme fonctionnera alors avec des compléments à 10^2. Prenons l'exemple d'un produit de deux nombres entre 90 et 100, soit 96×92.
- Le complément à 100 de 96 est 4 et celui de 92 est 8.
- On multiplie alors 4 par 8 on obtient 32.
- On calcule ensuite la différence 96 – 8 = 88 ou bien 92 – 4 = 88 aussi.
- On multiplie ce dernier par 100, on obtient 8800.
- Le résultat est alors 8800 + 32 =8832.

Un autre exemple avec des nombres plus grand que 100 : On calcule le produit 103×106
- Le « complément à 100 » de 103 est –3 et celui de 106 est –6.
- On multiplie alors –3 par –6 on obtient 18.
- On calcule ensuite la différence 103 – (–6) = 109 ou bien 106 – (–3) = 109 aussi.
- On multiplie ce dernier par 100, on obtient 10900.
- Le résultat est alors 10900 + 18 =10918.

Voici un dernier exemple mélangeant un nombre plus grand que 100 avec un nombre plus petit que 100. On prend 109×98 :
- Le « complément à 100 » de 109 est –9 et celui de 98 est 2.
- On multiplie alors –9 par 2 on obtient –18.
- On calcule ensuite la différence 109 – 2 = 107 ou bien 98 – (–9) = 107 aussi.
- On multiplie ce dernier par 100, on obtient 10700
- Le résultat est alors 10700 + (–18) =10682.

On généralise alors cette méthode aux produits proches de 1000, 10000…

On a ainsi différents algorithmes possibles que l'on peut utiliser pour entraîner les élèves à la fois à calculer mentalement, à formaliser une démarche et à utiliser un algorithme. Le choix de l'algorithme utilisé pourra alors dépendre des nombres en jeu ou du niveau des élèves.

Point de vue géométrique

On prend l'exemple du produit $9 \times 8 = 72$. Ce produit peut être vu comme l'aire d'un rectangle de longueur 9 unités de mesure et de largeur 8 unités de mesure. Sur la figure ci-dessous, il s'agit alors de déterminer l'aire du rectangle rose. En passant par les compléments à 10, ceci nous amène à considérer ce rectangle dans un carré de côté 10 unités de mesure comme dans la 1ère figure ci-après.

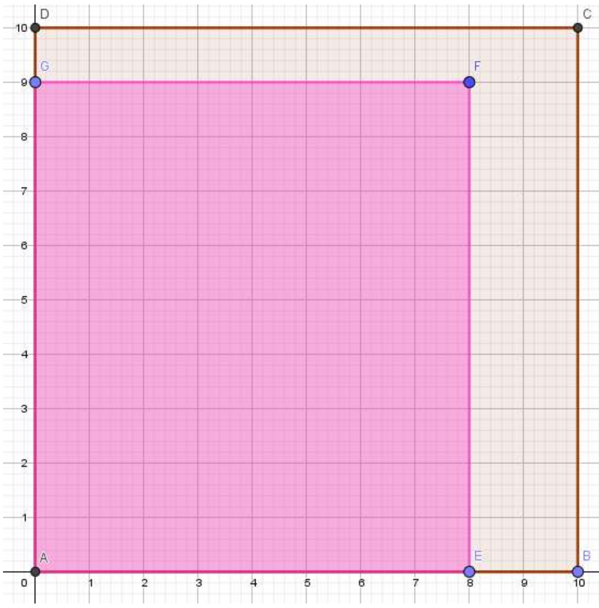


Figure 1

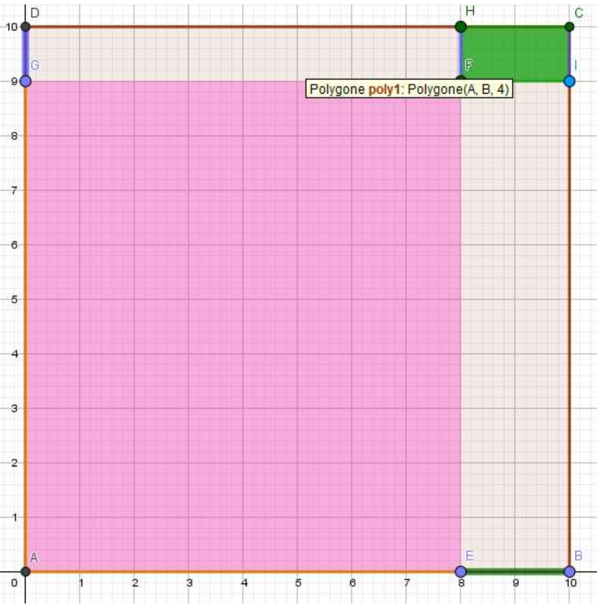


Figure 2

Les compléments à 10 des côtés vont générer un rectangle de côtés 2×1 représenté en vert sur la figure 2 ci-dessus. Si l'on veut utiliser l'aire de ce dernier dans le calcul de l'aire du rectangle rose, on doit alors retirer à ce dernier l'équivalent du rectangle vert, voir la figure 3 ci-dessous. Il nous reste alors un rectangle bleu de côtés 7×1 faisant le prolongement du rectangle enlevé, voir la figure 4.

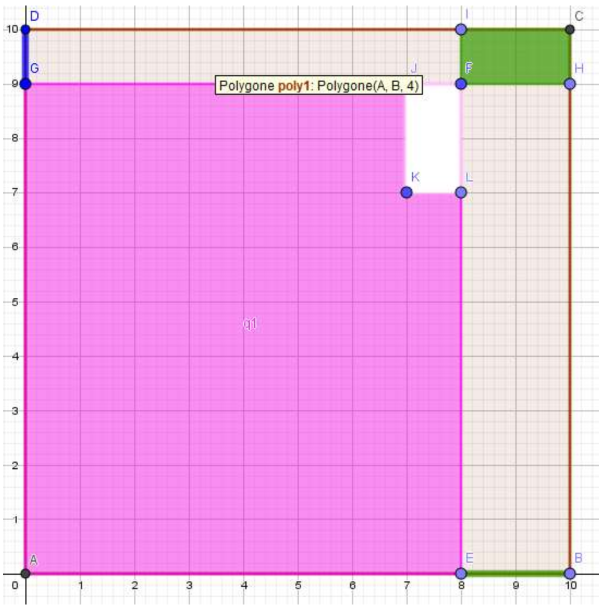


Figure 3

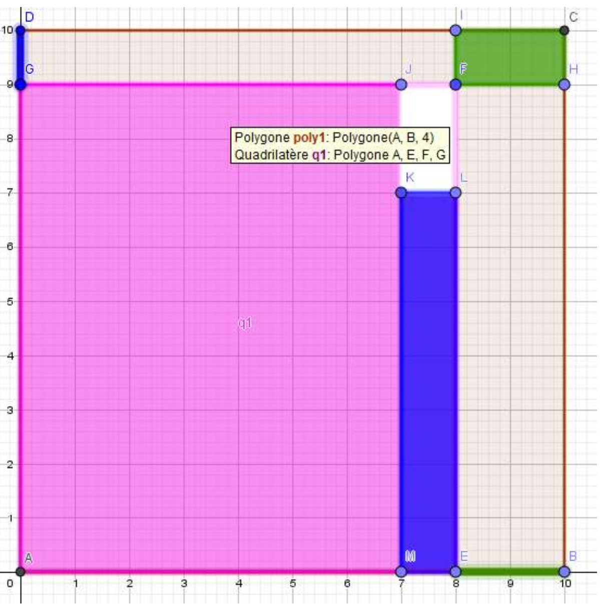


Figure 4

On découpe alors ce dernier et on le recolle au-dessus du rectangle rose pour faire un grand rectangle de côtés 10×7et d'aire 70 unités², voir la figure 5 ci-dessous.

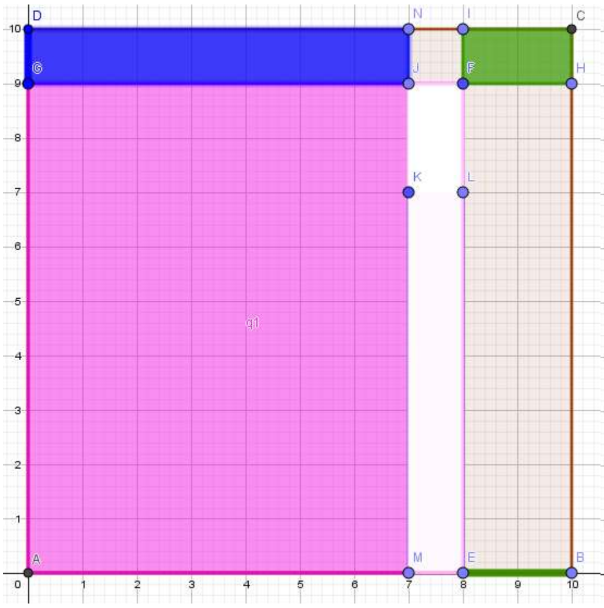


Figure 5

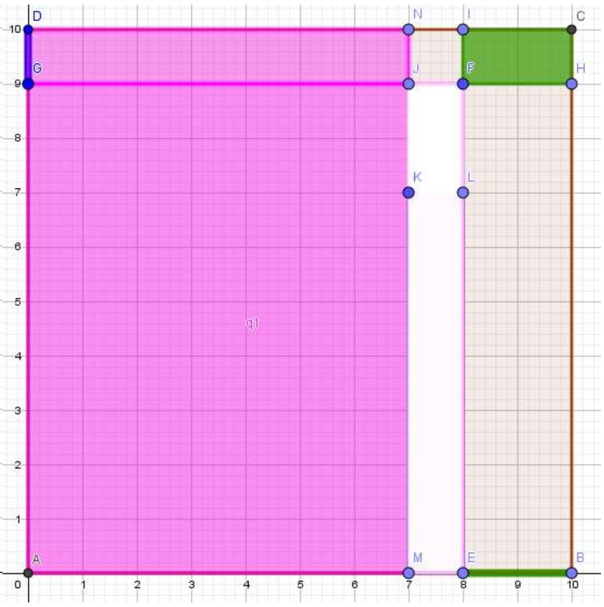


Figure 6

L'aire du rectangle rose initial est alors égale à l'aire du grand rectangle rose plus l'aire du rectangle vert, soit 72 unités.
Pour résumer, ceci revient à passer tout simplement de la figure 7 à la figure 8 ci-dessous.

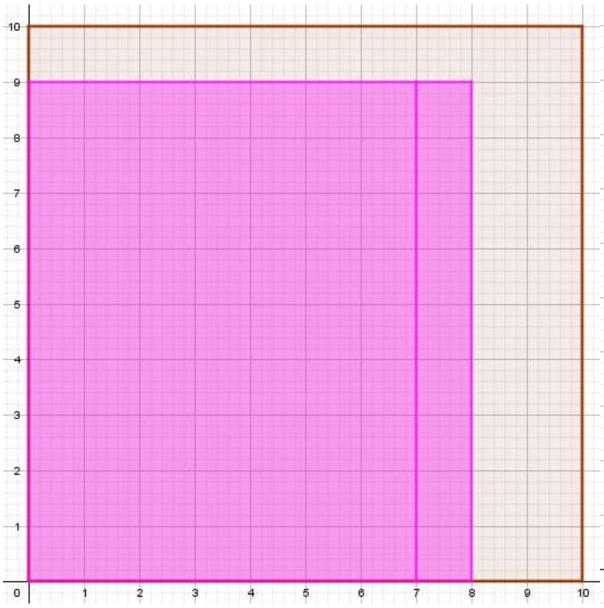


Figure 7

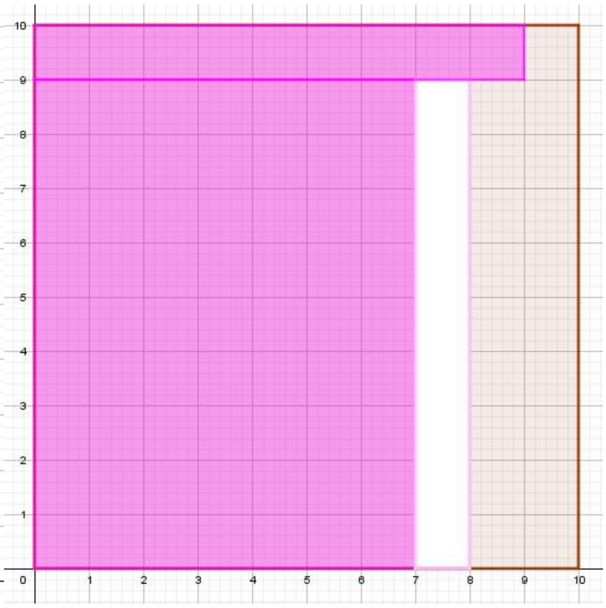
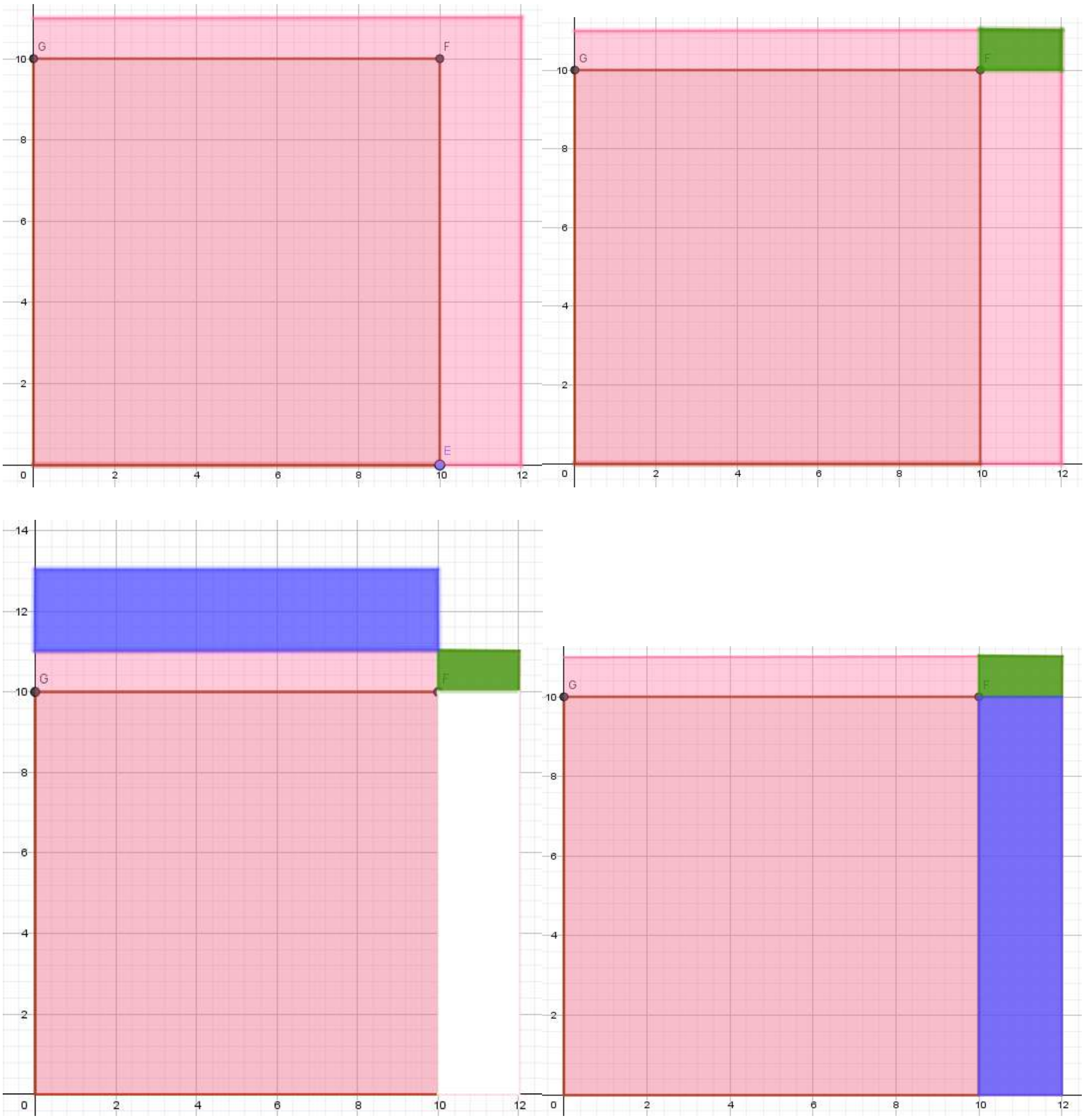


Figure 8

Avec un produit de deux nombres entre 10 et 20, voici les figures correspondantes, par exemple, au produit $12 \times 11 = 132$.

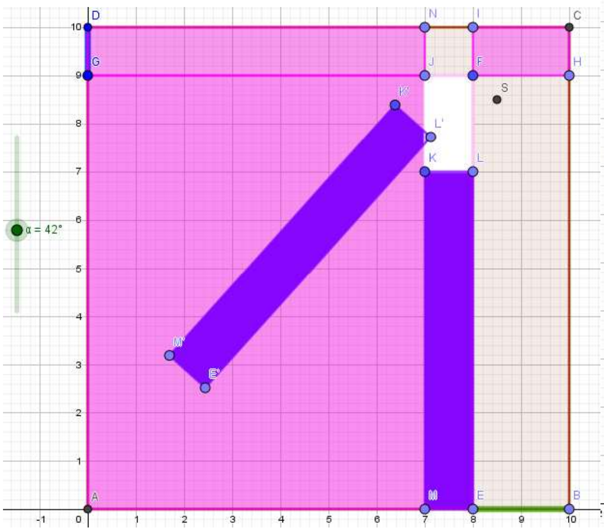


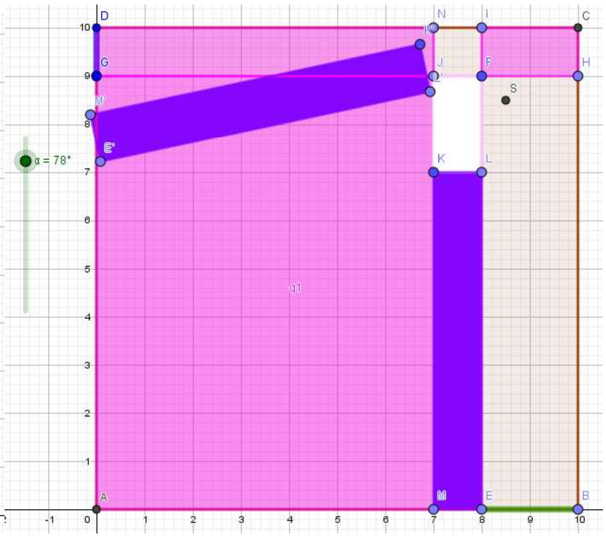
En conclusion, grâce à la démonstration d'une technique pratique que l'on montre à des élèves en difficulté pour les aider à retrouver les résultats des tables de multiplication de 5 à 9, on a pu aller au-delà en proposant aux élèves un algorithme pour calculer mentalement des produits plus complexes, en leur montrant comment faire des interprétations géométriques, en revisitant les opérations sur les relatifs et en manipulant des expressions littérales. Cela souligne une fois de plus l'importance et l'utilité de la démonstration en mathématiques.

D'autres exploitations possibles en géométrie

1. Décrire par quels mouvements on peut passer du rectangle bleu de la figure 4 au rectangle bleu de la figure 5.
(Réponse : Translation puis rotation, plusieurs solutions possibles)

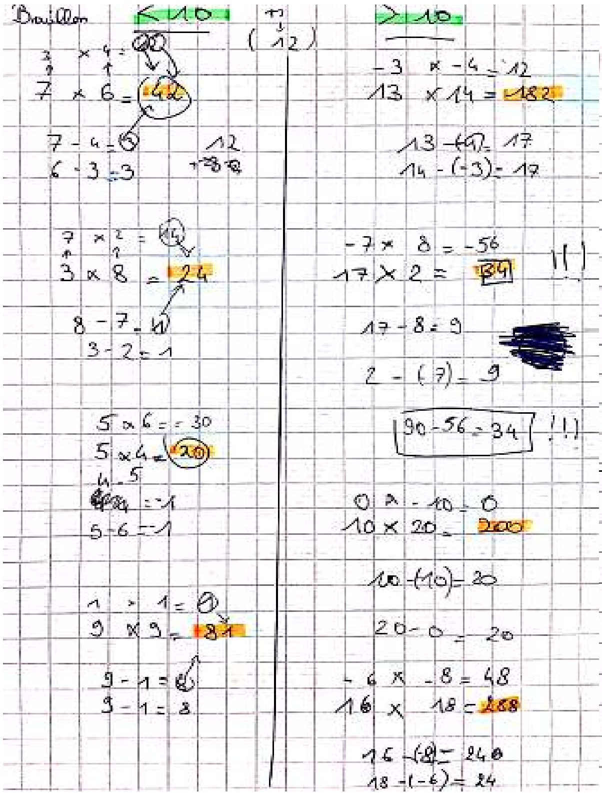
2. Peut-on passer par rotation du rectangle bleu de la figure 4 au rectangle bleu de la figure 5 ? Si oui, indiquer le centre, le sens et l'angle de rotation. Justifier votre réponse.
(Réponse : Oui, plusieurs solutions possibles)





Retour d'expérience

J'ai testé cette activité, comme tâche à prise d'initiatives, dans une classe de 3ème de 29 élèves, hétérogène et de niveau moyen. Le cours sur le calcul littéral a été fait plusieurs semaines auparavant. En ce qui me concerne, cela m'a pris un peu plus d'une heure et demie (une séance d'une heure, 15 minutes la séance suivante et 20 minutes pour la correction et la synthèse).
Au début de la séance, j'ai expliqué la technique aux élèves avec deux produits de chiffres plus grands que 5 (9×8 et 7×7). Certains élèves se sont demandé pourquoi on ne leur a pas montré cette technique avant la 3ème. (Il faut donc prévoir une réponse ou un commentaire.)
Je leur ai demandé ensuite de se répartir en petits groupes de 3 ou 4 élèves, de tester cette méthode sur d'autres chiffres (plus grands que 5 puis quelconques). Ensuite avec deux facteurs l'un plus petit que 10 et l'autre entre 10 et 20. Puis avec des nombres entre 10 et 20. Enfin avec des nombres quelconques. Tout cela m'a pris une quinzaine de minute.
A un moment ou à un autre, tous les groupes se sont arrêtés sur un exemple où le produit des compléments à 10 n'est pas un chiffre mais un nombre à deux ou trois chiffes (100). Certains ont réussi à trouver rapidement la parade mais d'autres m'ont appelé pour évoquer ce problème. Une fois le voile levé sur cette difficulté, un véritable émerveillement apparut sur le visage de chacun des élèves et on voyait clairement qu'ils venaient de découvrir quelque chose de simple mais aussi de mystérieux. Certains élèves sont allés jusqu'à tester des produits entre deux nombres à plusieurs chiffres pour s'assurer de la validité de la technique. Voici des exemples de tests faits par des groupes d'élèves.



Brouillon < 10 | > 10

3 × 4 = 12
7 × 6 = 42
7 − 4 = 3
6 − 3 = 3

7 × 2 = 14
3 × 8 = 24
8 − 7 = 1
3 − 2 = 1

5 × 6 = 30
5 × 4 = 20
5 − 6 = −1

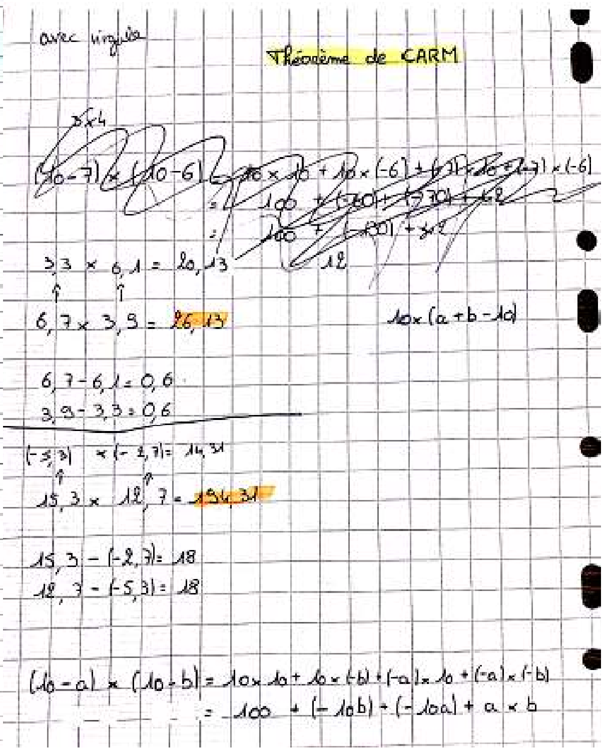
1 × 1 = 1
9 × 9 = 81
9 − 1 = 8
9 − 1 = 8

−3 × −4 = 12
13 × 14 = 182
13 − (−4) = 17
14 − (−3) = 17

−7 × 8 = −56
17 × 2 = 34
17 − 8 = 9
2 − (−7) = 9
90 − 56 = 34 !!!

0 × −10 = 0
10 × 20 = 200
10 − (−10) = 20
20 − 0 = 20

−6 × −8 = 48
16 × 18 = 288
16 − (−8) = 24
18 − (−6) = 24



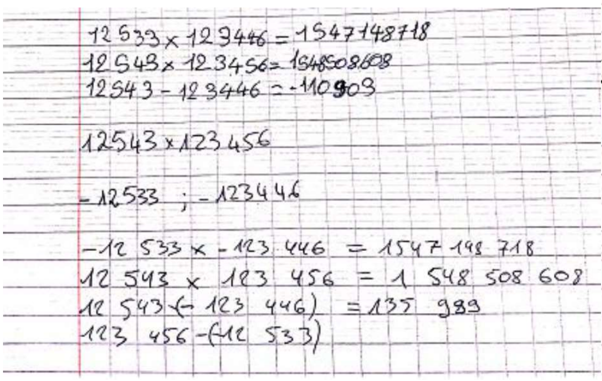
avec virgule
Théorème de CARM

3,3 × 6,1 = 20,13
6,7 × 3,9 = 26,13
6,7 − 6,1 = 0,6
3,9 − 3,3 = 0,6

$10\times(a+b-10)$

(−3,3) × (−2,7) = 14,31
15,3 × 12,7 = 194,31
15,3 − (−2,7) = 18
12,7 − (−5,3) = 18

$(10-a)\times(10-b) = 10\times10 + 10\times(-b) + (-a)\times10 + (-a)\times(-b)$
$= 100 + (-10b) + (-10a) + a\times b$

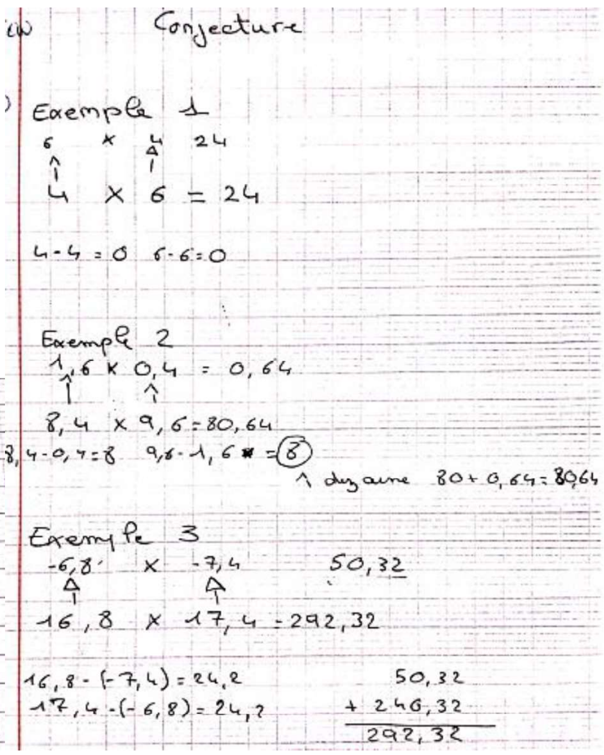


12 533 × 123 446 = 1547148718
12 543 × 123 456 = 1548508608
12 543 − 123 446 = −110903

12543 × 123 456

−12533 ; −123446

−12 533 × −123 446 = 1 547 148 718
12 543 × 123 456 = 1 548 508 608
12 543 − (−123 446) = 135 989
123 456 − (−12 533)



Conjecture

Exemple 1
6 × 4 24
4 × 6 = 24
4 − 4 = 0 6 − 6 = 0

Exemple 2
1,6 × 0,4 = 0,64
8,4 × 9,6 = 80,64
8,4 − 0,4 = 8 9,6 − 1,6 = 8
dizaine 80 + 0,64 = 80,64

Exemple 3
−6,8 × −7,4 50,32
16,8 × 17,4 = 292,32
16,8 − (−7,4) = 24,2
17,4 − (−6,8) = 24,2
50,32 + 242,00 = 292,32

Cette période de tests a pris une vingtaine de minutes. Certains élèves ont bien émis une conjecture et d'autres pensaient déjà au théorème qui va porter le nom de leur groupe.
J'ai demandé ensuite aux élèves de chercher une démonstration pour pouvoir valider cette technique. Il fallait ensuite la rédiger et rajouter quelques exemples sur la feuille de réponse.
Après quelques minutes, la majorité des élèves ont bien senti qu'il fallait passer par le calcul littéral pour faire la démonstration. La rumeur s'est propagée rapidement à l'ensemble de la classe. Certains élèves ont introduit plusieurs lettres et ont pâti par la suite de ce choix. D'autres ont pris seulement deux lettres pour le début et m'ont appelé pour demander mon avis et comment il fallait faire pour continuer.
A la fin de la séance, un groupe de filles avait bien trouvé la démonstration. Ces élèves étaient fières d'avoir enfin leur théorème (théorème de CARM en référence à Clara, Aurélie, Romane et Maely). Un groupe avait presque fini. Un autre groupe s'est perdu dans les lettres malgré un bon départ. D'autres groupes avaient commencé avec des lettres mais ils n'ont pas su aller plus loin et un dernier groupe est resté sur des exemples sans pouvoir aller plus loin.
Au début de la séance suivante, j'ai donné un quart d'heure supplémentaire aux élèves pour finir la démonstration et rédiger au propre leurs réponses. Pour la correction, j'ai fait passer au tableau une fille du groupe CARM. J'ai répondu ensuite à quelques questions et j'ai fait une synthèse du travail fait par les groupes. J'ai montré ensuite aux élèves l’interprétation géométrique de cette technique.
Les élèves ont bien rendu des copies propres mais au-delà de l'aspect mathématique, leur rédaction s'est limitée à peu de phrases et d'explications, malgré le travail qui est fait régulièrement (lors des séances d'exercices par exemple) sur l'importance de la rédaction.

Je présente pour terminer quelques copies d'élèves qui illustrent bien le travail de l’ensemble des groupes.

Aurélie
Clara
Romane G.
Maely
3°D

Mathématiques

< 10

$3 \times 4 = \boxed{12}$
$7 \times 6 = 42$
$7 - 4 = \boxed{3}$
$6 - 3 = \boxed{3}$

$7 \times 2 = \boxed{14}$
$3 \times 8 = 24$
$3 - 2 = \boxed{1}$
$8 - 7 = \boxed{1}$

10
30

$5 \times 6 = \boxed{30}$
$5 \times 4 = 20$
$5 - 6 = \boxed{-1}$
$4 - 5 = \boxed{-1}$

$1 \times 1 = \boxed{1}$
$9 \times 9 = 81$
$9 - 1 = \boxed{8}$
$9 - 1 = \boxed{8}$

> 10

$-3 \times (-4) = \boxed{12}$
$13 \times 14 = 182$
$13 - (-4) = \boxed{17}$
$14 - (-3) = \boxed{17}$

$-7 \times 8 = -56$
$17 \times 2 = 34$
$17 - 8 = 9$
$2 - (-7) = 9$
$90 - 56 = 34$

$0 \times (-10) = 0$
$10 \times 20 = 200$
$10 - (-10) = 20$
$20 - 0 = 20$

$-8 \times -6 = 48$
$18 \times 16 = 288$
$18 - (-6) = 24$
$16 - (-8) = 24$

avec virgule

$3{,}3 \times 6{,}1 = 20{,}13$
$6{,}7 \times 3{,}9 = 26{,}13$

$6{,}7 - 6{,}1 = 0{,}6$
$3{,}9 - 3{,}3 = 0{,}6$

$(-5{,}31) \times (-2{,}7) = \boxed{14{,}31}$
$15{,}3 \times 12{,}7 = 194{,}31$

$15{,}3 - (-2{,}7) = \boxed{18}$
$12{,}7 - (-5{,}31) = \boxed{18}$

$10 \times (a-b) = c$

$(10-a) \times (10-b) = c$

$a \times b = x \qquad \longrightarrow x$

$a-(10-b) = d$

$b-(10-a) = d$

$10 \times (a+b-10)$

d = chiffre des dizaines

c = chiffre des unités

$(10-a) \times (10-b) = 10 \times 10 + 10 \times (-b) + (-a) \times 10 + (-a) \times (-b)$

$= 100 + (-10b) + (-10a) + a \times b$

$(10-a) \times (10-b) + 10 \times (a+b-10)$

$10 \times (a+b-10) = 10a + 10b - 100$

$x = 100 + (-10b) + (-10a) + a \times b + 10a + 10b - 100$

$= a \times b$

Avec la démonstration ci-dessus, on peut voir que la technique marche bien car $(10-a) \times (10-b) + 10 \times (a+b-10)$ est bien égale à $a \times b$.

MATHS

18/04/19

NOTE :

OBSERVATIONS :

D'abord, on teste cette technique sur des chiffres inférieurs à 10.

5 x 2

ex: 5 x 8 = 40

8 - 5 = 3

5 - 2 = 3

→ Cette technique a l'air de fonctionner pour les chiffres inférieurs à 10.

On teste maintenant avec des nombres supérieurs à 10

- 5 x 7 → - 35

15 x 3 = 45

15 - 7 = 8 → 80 8

80 + (- 35)

$$\begin{array}{r} 80 \\ -\ 35 \\ \hline 45 \end{array}$$

→ Cette techique à l'air de fonctionner pour les chiffes supérieurs à 10.

Enfin, on test avec ~~un~~ des chiffres supérieurs à 20 :

$-10 \times -15 = 150$

$20 \times 25 = 500$

- $20 - (-15) = 35$
- $25 - (-10) = 35$

→ 350

$$\begin{array}{r} 150 \\ + \ 350 \\ \hline 500 \end{array}$$

→ Cette technique fonctionne avec des chiffres supérieurs à 20.

Démonstration :

iew

Conjecture

Exemple 1

6 × 4 24

4 × 6 = 24

4 - 4 = 0 6 - 6 = 0

Exemple 2

1,6 × 0,4 = 0,64

8,4 × 9,6 = 80,64

8,4 - 0,4 = 8 9,6 - 1,6 = 8

dizaine 80 + 0,64 = 80,64

Exemple 3

-6,8 × -7,4 50,32

16,8 × 17,4 = 292,32

16,8 - (-7,4) = 24,2

17,4 - (-6,8) = 24,2

  50,32
+ 246,32
  292,32

Exemple 4

-5,7 × 3,3 = -18,81

15,7 × 6,7 = 105,19

15,7 - 3,3) 12,4 × 10 = 124

6,7 - (-5,7) 12,4 × 10 = 124

  124
- 18,81
  105,19

N Démonstration

$x + x_1 = 10 \qquad y + y_1 = 10$

$x_1 \times y_1 = x_2$

$x \times y = b$

$x - y_1 = a \qquad$ Résulta $= a \times 10 + x_2$

$y - x_1 = a \qquad = a_1 + x_2$

Je pose $\qquad a_1 = 10a.$

$x_1 = 10 - x \qquad y_1 = 10 - y$

je sais que

$x - y_1 = y - x_1$

car

$x - (10 - y) = y - (10 - x)$

si je connais le produit

$x_1 \times y_1 = x_2$

Alors si je connais le produit

$b = xy$

$b = x_2 + 10(x - y_1)$

$b = x_2 + 10(x - 10 + y)$

$b = x_2 + 10x + 10y - 100$

$b = x_2 + 10(x + y) - 100$

et on peut vérifier car

$100 - 10x - 10y = b - x_2$

Noélie, Romane, Nancy

$$\overset{7}{\uparrow}\quad\overset{4}{\uparrow}$$
$$3 \times 6 = 18$$

$$7 \times 4 = 28$$
$$-10$$
$$\boxed{18}$$

$3 - 4 = -1$ dizaine

$$\overset{5}{\uparrow}\quad\overset{2}{\uparrow}$$
$$5 \times 8 = 40$$

$$5 \times 2 = 10$$
$$5 - 2 = 30$$
$$40$$

$$\overset{8}{\uparrow}\quad\overset{3}{\uparrow}$$
$$2 \times 7 = 14$$

$$8 \times 3 = 24$$
$$-10$$
$$14$$

$$2 - 3 = -1$$
$$7 - 8 = -1$$

$$\overset{5}{\uparrow}\quad\overset{6}{\uparrow}$$
$$5 \times 4 = 20$$

$$5 \times 6 = 30$$
$$-10$$
$$\boxed{20}$$

$$5 - 6 = -1$$

$$\overset{-2}{\uparrow}\quad\overset{-1}{\uparrow}$$
$$12 \times 11 = 132$$

$$= 2 \times (-1) = +2$$

$$\cancel{12 - 1 = 11}$$
$$\cancel{11 - 2 = 9}$$

$$12 - (-1) = 13$$
$$11 - (-2) = 13 \rightarrow 130$$

$$a \times b = c \times d - e - f$$

D. La réciproque du théorème de Pythagore

Romain LANCINI – Collège F. GIROUD de Vincennes (94)
Niveau : 4ème

© Vatican – Domaine public

La démonstration de résultats de cours répond à une attente institutionnelle.

Je vous propose ici, la démonstration de la réciproque du théorème de Pythagore figurant dans les Eléments d'Euclide (livre 1, proposition 48).

Elle permet de réinvestir les notions sur les triangles égaux ainsi que le théorème de Pythagore.

Elle a été proposée après un temps dévolu au travail sur la notion de réciproque à travers des exemples. Cela a été l'occasion de retravailler la notion de contre-exemple pour invalider une proposition ainsi que les démonstrations utilisant des propriétés ou définitions établies pour affirmer qu'une proposition est vraie. Un bilan a été fait. Les élèves ont ensuite énoncé la réciproque du théorème de Pythagore.

Le théorème de Pythagore nous donne une condition nécessaire pour qu'un triangle soit rectangle à savoir l'égalité de Pythagore.

L'objectif ici est de démontrer que cette égalité de Pythagore est suffisante pour prouver qu'un triangle est rectangle.

Rappelons un point de vigilance portant sur les conditions nécessaires et les conditions suffisantes puisque des élèves les confondent aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.
Pour la propriété sous forme implicative : « si A alors B », B est une condition nécessaire pour avoir A, c'est à dire qu'il faut B pour avoir A (on dit que B est la conclusion de la propriété) tandis que A est une condition suffisante pour avoir B, c'est-à-dire qu'il suffit d'avoir A pour avoir B (A est la condition d'utilisation de la propriété).

Différentes solutions s'offrent à nous quant à la mise en place effective de cette démonstration.

Le professeur peut certes démontrer à ses élèves la réciproque du théorème de Pythagore, éventuellement en traitant un exemple numérique en amont ou en parallèle (proposition en annexe où les triangles mis en jeu sont séparés contrairement à la version d'Euclide).

Il peut cependant être plus avantageux de faire travailler les élèves sur l'ensemble des six compétences disciplinaires référencées dans le programme.

La suite de l'article se place dans cette dernière optique.

Le travail se décompose en quatre temps.

Temps 1 : Démonstration sur des exemples

Les élèves démontrent que des triangles dont on donne la longueur des trois côtés et vérifiant l'égalité de Pythagore sont des triangles rectangles.

Voici deux types de sujets différenciés.

Sujet de type 1 : Soit ABC un triangle tel que AB = 4,8 cm, AC = 5,5 cm et BC = 7,3 cm. Vérifiez que l'égalité de Pythagore est vraie pour le triangle ABC. Construisez un triangle ABC vérifiant les conditions imposées ci-dessus. Tracer la droite (d) perpendiculaire à la droite (AC) passant par A. Construire le point D appartenant à droite (d) tel que AD = 4,8 cm et tel que D n'appartienne pas au demi-plan de frontière (AC) contenant B. Calculez DC. N'oubliez pas de justifier. Démontrez que les triangles ABC et ACD sont égaux. N'oubliez pas d'indiquer les sommets homologues. En déduire que le triangle ABC est un triangle rectangle.
Sujet de type 2 : Soit ABC un triangle tel que AB = 6,5 cm, AC = 7,2 cm et BC = 9,7 cm. Vérifiez que l'égalité de Pythagore est vraie pour le triangle ABC. Construisez un triangle ABC vérifiant les conditions imposées ci-dessus. Tracer la droite (d) perpendiculaire à la droite (AC) passant par A. Construire le point D appartenant à droite (d) tel que AD = 6,5 cm et tel que D n'appartienne pas au demi-plan de frontière (AC) contenant B. Raisonnez sur la figure que vous avez tracée et démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.

Les sujets doivent différer par les longueurs mises en jeu pour que l'on ait plusieurs triangles vérifiant l'égalité de Pythagore. Ces longueurs proviennent des triplets pythagoriciens appliqués à des coefficients de proportionnalité.

Le sujet de type 1 est somme toute assez classique puisque les questions détaillent le raisonnement. Le sujet de type 2 est, quant à lui, plutôt à un travail de recherche et où les élèves doivent mettre en place une stratégie gagnante en utilisant leurs compétences.

Une lecture commune en classe sur les deux premières questions sera faite et des explications seront apportées pour que chaque élève puisse se mettre au travail.

On peut proposer ce travail aussi bien hors la classe, éventuellement en devoir à la maison, qu'en classe en séance de groupes et pour laquelle des coups de pouces peuvent être donnés.

Les coups de pouces portent aussi bien sur les savoir-faire que sur le raisonnement et se déclineront par des questions, des aides aux tracés, des recherches de rappels de cours ou de rédactions dans les cahiers.
Exemples de coups de pouce :
Comment fait-on pour prouver que deux triangles sont égaux ?
Quels sont les trois cas d'égalité de triangles ?
Avez-vous codé la figure, porté toutes les informations connues sur la figure ?
Que peut-on faire ? Que voyez-vous ?
N'y a t-il pas une configuration dans laquelle vous pouvez appliquer un théorème ?
Que voulez-vous démontrer et comment y parvenir ?

<u>Temps 2 : Constat</u>

Un bilan du premier temps est présenté.

Trace écrite proposée :
« Bilan : Les triangles étudiés vérifiant l'égalité de Pythagore sont rectangles. »

<u>Temps 3 : Conjecture</u>

Une conjecture est une phrase que l'on croit vraie parce que plusieurs exemples la corroborent.
Une conjecture commence par « on dirait que », « il semble que », « je pense que », « je crois que » ...
Il est donc légitime d'émettre la conjecture suivante au regard des exemples traités :

Trace écrite proposée :
« Conjecture : On dirait que si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore alors il est rectangle. ».

Il existe d'autres triangles vérifiant l'égalité de Pythagore, donnons-en d'autres.
Par exemple, les triangles dont on donne les longueurs, exprimées dans une même unité, des trois côtés sous forme de triplet vérifient aussi l'égalité de Pythagore :
(3,9 ; 8 ; 8,9) ; (3,6 ; 7,7 ; 8,5) ; (4 ; 4,2 ; 5,8) ; (1,1 ; 6 ; 6,1).
Sont-ils aussi rectangles ? Existe-t-il un triangle vérifiant l'égalité de Pythagore qui ne soit pas rectangle ?

Le professeur affirme qu'il n'y a pas de contre-exemple et entame le temps 4 de la démonstration générale reposant sur celle qui a été faite dans le temps 1.

Temps 4 : Démonstration générale

Exposée par le professeur.

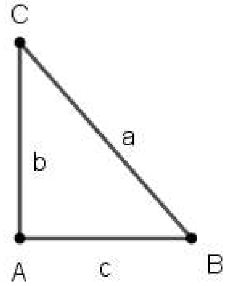
Proposition de trace écrite :

Démonstration dans le cas général

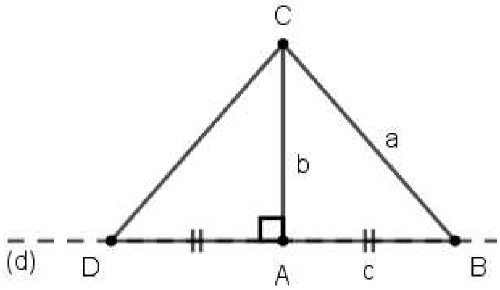
Soit a, b et c trois nombres strictement positifs représentant les longueurs, exprimées dans une même unité, et vérifiant $a^2 = b^2 + c^2$.

Soit alors ABC un triangle dont les trois côtés [AB], [AC] et [BC] mesurent respectivement c, b et a.

Démontrons que ABC est un triangle rectangle.



Construisons pour cela la droite (d) perpendiculaire à la droite (AC) passant par A puis le point D appartenant à la droite (d) mais n'appartenant pas au demi-plan de frontière (AC) contenant B (pour une meilleure lisibilité).



Le deuxième triangle ADC étant rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $CD^2 = AC^2 + AD^2 = b^2 + c^2$. Or $b^2 + c^2 = a^2$ d'après l'énoncé, donc $CD^2 = a^2$ donc $CD = a$.

Ainsi, les deux triangles ABC et ADC ont leurs côtés deux à deux de même longueur donc d'après un cas d'égalité des triangles, les deux triangles sont égaux avec $\begin{cases} A \to A \\ B \to D \\ C \to C \end{cases}$.

Par conséquent, comme le triangle ACD est rectangle, le triangle ABC l'est aussi.
C.Q.F.D.

ANNEXE

Démonstration dans un cas particulier

Vérifier que $13^2 = 12^2 + 5^2$

D'une part, $13^2 = 13 \times 13 = 169$

D'autre part, $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

Donc l'égalité $13^2 = 12^2 + 5^2$ est bien vraie.

Considérons un triangle ABC dont les côtés [BC], [AB] et [AC] mesurent respectivement 13 cm, 12 cm et 5 cm.

Démontrons que ABC est un triangle rectangle.

Considérons un autre triangle A'B'C' rectangle en A' tel que A'B' = 12 cm et A'C' = 5 cm.

Calculons B'C'

A'B'C' est rectangle en A' donc d'après le théorème de Pythagore,

$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$.

$B'C'^2 = (12 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm})^2 = 144 \text{ cm}^2 + 25 \text{ cm}^2 = 169 \text{ cm}^2$

Donc $B'C' = \sqrt{169 \text{ cm}^2} = 13$ cm.

Démontrons que ABC et A'B'C' sont égaux.

On a AB = A'B', AC = A'C' et BC = B'C' ;

Or, deux triangles ayant leurs trois côtés respectivement de même longueur sont égaux ;

Donc les triangles ABC et A'B'C' sont égaux avec

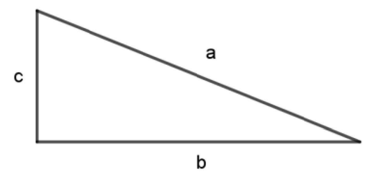
$$\begin{cases} A \to A' \\ B \to B'. \\ C \to C' \end{cases}$$

Concluons.

Par conséquent, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et comme $\widehat{A'} = 90°$, $\widehat{A} = 90°$. C.Q.F.D.

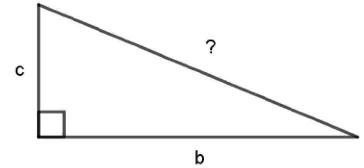
Démonstration dans le cas général

Soit a, b et c trois nombres strictement positifs représentant les longueurs, exprimées dans une même unité, des côtés d'un triangle et vérifiant $a^2 = b^2 + c^2$.



Démontrons que ce triangle est rectangle.

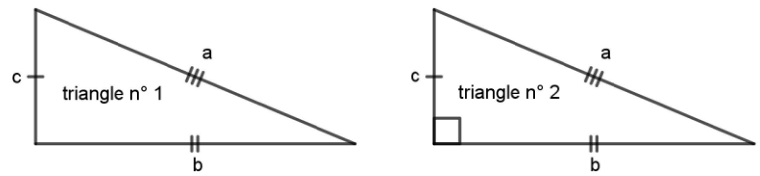
Pour arriver au but, considérons un deuxième triangle qui est rectangle et dont les côtés de l'angle droit mesurent c et b.



Ce deuxième triangle étant rectangle, d'après le théorème de Pythagore, le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme $b^2 + c^2$ qui elle-même est égale à a^2 d'après l'énoncé.

Par conséquent, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à a^2 donc la longueur de l'hypoténuse est égale à a.

Ainsi, nous avons deux triangles tels que :



Les deux triangles ont leurs côtés deux à deux de même longueur donc d'après un cas d'égalité des triangles, les deux triangles sont égaux.

Par conséquent, comme le deuxième triangle est rectangle alors le premier l'est aussi. C.Q.F.D.